atvērtā kopa 2015

Komandu olimpiāde matemātikā

11. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Olga vēlas uz 2 gadiem abonēt mobilos sakarus. *Cablecom* piedāvā SIM karti par 49 frankiem un ikmēneša maksu 29 Fr. Identiskam plānam *Salt* piedāvā SIM par 1 Fr, mēneša maksu 35 Fr, un pieslēgšanas bonusu 100 Fr (atvilkts no pirmajiem rēķiniem). Kurš piedāvājums ir izdevīgāks?

Atrisinājums:
Aprēķināsim kopējās izmaksas pirmo divu gadu laikā (24 mēneši). Ar *Cablecom*: $49 + 29 \cdot 24 = 745$. Ar *Salt*: $1 + 35 \cdot 24 - 100 = 741$. Tātad *Salt* ir nedaudz izdevīgāks. (Tā kā procentu likmes šobrīd ir tuvu nullei, naudas plūsmas diskontēšanu neveicam.) Var rēķināt arī netieši, balsoties uz starpībām: *Cablecom*−*Salt*$= 49 - (1 - 100) + 24 \cdot (29 - 35) = 148 - 144 = 4$.

2. Cementa ražotāja SIA «Cemex» realizējusi pilotprojektu, kaļķakmens karjerā «Kūmas» uzbūvējot 500 metrus garu ceļa posmu no valčbetona, un ir gatava sadarboties ar ceļu būves uzņēmumiem un VAS «Latvijas Valsts ceļi» šādu ceļu būvniecībā Latvijā. «Cemex» valdes loceklis Ēriks Maikls Trusevics stāstīja, ka betona ceļu izmaksas ir par aptuveni 20% lētākas nekā asfalta ceļu izmaksas, piemēram, šī eksperimentālā ceļa izmaksas bija 45 eiro par kvadrātmetru. Cik izmaksāja šis ceļš? Izskaidro pieņēmumus! Cik izmaksātu šāds asfalta ceļš?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka ceļš ir divjoslu ar joslas platumu 4 metri. Kopējais platums tad ir 8 metri. Tika uzbūvēti $500 \cdot 8 = 4000$ m^2 ceļa, kas izmaksāja $45 \cdot 4000 = 180'000$ eiro. Tā kā betona ceļa izmaksas ir par 20% mazākas nekā asfalta, tās sastāda 80% no asfalta izmaksām (pieņemot, ka asfalta risinājumā nemainās ceļa platums). Asfalta ceļš attiecīgi maksātu $180'000/0.8 = 225'000$ eiro.

3. Atrodiet ciparus a, b, c tā, lai $\overline{abc} = a! + b! + c!$.

Zināšanai: Naturālam n, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, bet $0! = 1$.
$\overline{abc}$ apzīmē skaitli, ko veido cipari a, b, c norādītajā secībā.
Piemēram, ja $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, tad $\overline{abc} = 123$.

Atrisinājums:
$a = 1$, $b = 4$, $c = 5$.

4. Doti $n \geq 2$ pozitīvi skaitļi. Kas ir lielāks: šo skaitļu summas kvadrāts, vai arī šo skaitļu kvadrātu summa?

Atrisinājums:
Atverot iekavas summas kvadrātam, iegūstam gan katra skaitļa kvadrātu, gan arī citus reizinājumus, kas visi ir pozitīvi. Tātad, summas kvadrāts ir lielāks (stingra nevienādība).

$$\begin{aligned}(x_1 + \ldots + x_n)^2 &= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + \ldots x_2x_n + \ldots + x_nx_{n-1} + x_n^2 \\ &> x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.\end{aligned}$$

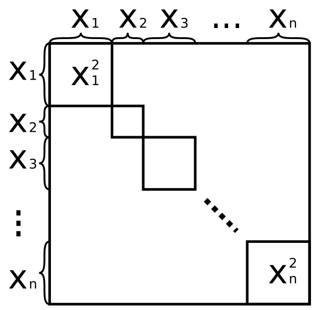
To pašu ir iespējams pierādīt ar indukcijas palīdzību. Indukcijas bāze $n = 2$:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > x_1^2 + x_2^2.$$

Pieņemot, ka nevienādība izpildās kādam $n \geq 2$, pierādīsim, ka tā ir spēkā arī $n+1$:

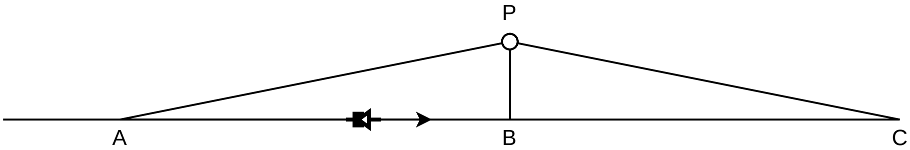
$$\begin{aligned}(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1})^2 &= (x_1 + \ldots + x_n)^2 + 2(x_1 + \ldots + x_n)x_{n+1} + x_{n+1}^2 \\ &> (x_1 + \ldots + x_n)^2 + x_{n+1}^2 > x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2.\end{aligned}$$

Pēdējā nevienādībā izmantots induktīvais pieņēmums.
Šeit rezultāts attēlots arī ģeometriski:



5. Pēc vēsturiski ātrākās kosmosa kuģa palaišanas 2006. gadā, *New Horizons* šī gada 14. jūlijā palidoja garām Plūtonam 12 500 km attālumā. Zonde lidoja ar ātrumu 49 350 km/h un lielāko daļu dienas pavadīja, uzņemot Plūtona attēlus. Pieņemot, ka zonde lidoja taisni un ar nemainīgu ātrumu, aprēķini, cik ilgi bija iespēja uzņemt attēlus mazāk kā 40 000 km attālumā no Plūtona!

Atrisinājums:



Shematiski attēlots: punkts P ir Plūtons, zonde lido pa taisni AC un vistuvākais punkts ir B. Tātad $PB \perp AC$ un ΔABP ir taisnleņķa. Punktus A un C atliekam tieši 40 tūkstošu km (lietosim šādas vienības) attālumā no Plūtona, uz zondes trajektorijas. Tātad hipotenūza $|PA| = 40$ un katete $|PB| = 12.5$. Pēc Pitagora teorēmas aprēķinām otras katetes garumu

$$|AB| = \sqrt{(40^2 - 12.5^2)} = \sqrt{1443.75} \approx 38.$$

Simetrijas dēļ $|BC| = |AB|$. Lai aprēķinātu laiku, ko zonde pavadīja uz nogriežņa $|AC|$, izdalām tā garumu ar zondes ātrumu, iegūstot $76/49.35 \approx 1.54$ stundas jeb 92.4 minūtes.

Acīgākie skolēni pamanīs, ka Plūtons nav punkts, bet gan lode, kurai ir rādiuss. Shematiski varam to attēlot kā riņķa līniju ar rādiusu 1190 km un centru P. Tad taisnleņķa trijstūra ABP katetes BP un hipotenūzas AP garums ir par 1.19 tūkstošiem kilometru lielāks. Attiecīgi,

$$|AB| = \sqrt{(41.19^2 - 13.69^2)} = \sqrt{1509.2} \approx 38.85,$$

un šajā risinājumā atbilde ir $77.7/49.35 \approx 1.575$ stundas jeb 94.5 minūtes.

6. Dota ciparu virkne 1234468..., kurā katrs nākamais cipars ir pēdējais cipars no skaitļa, kurš iegūts, reizinot iepriekšējos 4 ciparus. Atrodiet šīs virknes 2015. ciparu!

Atrisinājums:
Paturpinot doto virkni, iegūstam 1234468864628**4468**... Ievērojam, ka no 14. cipara atkārtojas 4 ciparu rinda 4468, kura bija jau sākumā no 4. līdz 7. ciparam. Tā kā katru nākamo ciparu nosaka tikai un vienīgi iepriekšējie 4, tad pēc šiem 4 cipariem sekos tādi paši kā pēc tiem, kas ir rindas sākumā, un veidosies 10 ciparu periods. Tātad, sākot ar ceturto ciparu, veidojas 10 ciparu periods, un 2015. cipars būs otrais šajā periodā $(2015 - 3 - 201 \cdot 10 = 2)$. Atbilde ir cipars "4".

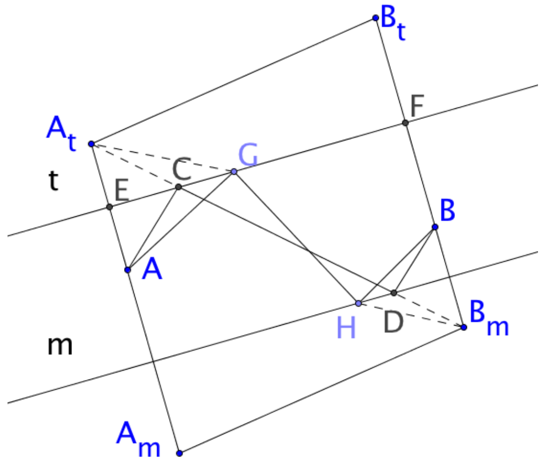
7. Kuram naturālam skaitlim zem 1000 ir visvairāk naturālu dalītāju? Aprakstiet, kā atradāt šo skaitli. Šoreiz nav nepieciešams pierādīt, ka atrasts labākais iespējamais skaitlis.

Atrisinājums:
Skaitlim 840 ir 32 dalītāji. Dalītāju skaitu var aprēķināt, izsakot doto skaitli pirmreizinātājos. Piemēram, $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Tā dalītājiem ir tie paši pirmreizinātāji, iespējams, zemākās pakāpēs (arī nultajā pakāpē). Tātad dalītāju skaits ir $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

8. Dotas divas paralēlas taisnes t un m un divi punkti plaknes daļā starp šīm taisnēm. Neviens no punktiem neatrodas uz dotajām taisnēm. Atrodiet īsāko ceļu starp abiem punktiem tā, lai tas iekļautu vismaz vienu punktu no taisnes t un vienu punktu no taisnes m.

Atrisinājums:
Dotie punkti - A un B, dotās taisnes - m un t. A_t, A_m, B_t, B_m - attiecīgi punktu A un B simetrisks attēlojums pret taisnēm t un m. C - A_tB_m un t krustpunkts, D - A_tB_m un m krustpunkts (Līdzīgi apskatām gadījumu, ja C - A_mB_t un m krustpunkts, D - A_mB_t un t krustpunkts). G un H - brīvi izvēlēti punkti attiecīgi uz taisnēm t un m, kas nesakrīt ar punktiem C un D. Pēc simetrijas redzams, ka $AC = A_tC$, $AG = A_tG$, $BH = B_mH$, $BD = B_mD$. Tā kā īsākais ceļš starp diviem punktiem ir nogrieznis, tad $A_tB_m < A_tG+GH+HB_m$ un $AC+CD+DB < AG+GH+HB$.

Tā kā $A_tA_m \perp t$ un $B_tB_m \perp t$, tad $A_tA_m \parallel B_tB_m$. Turklāt $A_tA_m = B_tB_m$ un $A_mA_tB_tB_m$ ir paralelograms. Pieņemsim, ka $AE \leq BF$. Tātad $\angle BAA_t \geq 90°$ un $A_tB_m \leq A_mB_t$. Tātad prasītais ceļš caur punktiem C un D ir īsāks nekā ceļš caur jebkuriem citiem punktiem uz taisnēm m un t. Gadījumā, ja $AE > BF$, īsākais ceļš ir caur A_mB_t un attiecīgi taišņu m un t krustpunktiem.



9. Adventes kalendāram ir 24 durtiņas. Aiz tieši vienām slēpjas zelta jēriņš, bet aiz pārējām - šokolādes, turklāt visi varianti ir vienādi varbūtīgi. Ilze ļoti grib iegūt zelta jēriņu, taču tas iespējams tikai, ja uzmin īstās durtiņas. Viņa drīkstēs izvēlēties kādas no durtiņām, tad Renārs atvērs 22 no pārējām, parādot, ka tajās ir šokolāde. Tātad paliks tikai divas aizvērtas durtiņas. Ilzei būs iespēja nomainīt savu izvēli. Vai izmantot šo iespēju un mainīt izvēli? Kā tas izmainīs izredzes?

Atrisinājums:
Varbūtība, ka aiz sākotnēji izvēlētajām durtiņām ir zelta jēriņš, ir 1/24, tā attiecīgi ir arī varbūtība "laimēt", nemainot savu izvēli. Savukārt varbutība, ka tas ir aiz kādas no 23 citām ir 23/24. Neatkarīgi no tā, Renārs atvērs 22 no 23 durtiņām. Tātad gadījumā, ja jēriņš bija aiz kādas no šīm 23, tad Renārs atvērs pārējās 22, aiz kurām ir šokolāde, līdz ar to jēriņš paliks aiz tām durtiņām, ko Renārs atstāja neatvērtas - un, mainot savu izvēli, Ilze noteikti "laimēs", bet nemainot - paliks ar šokolādi. Tā kā šis scenārijs notiek ar varbūtību 23/24, tad izvēloties mainīt savu izvēli, Ilze uzlabo savas izredzes 23-kārtīgi.

P.S. Šis ir *Monty Hall* problēmas uzskatāmāks variants. Vairāk lasīt adresē `wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem`.

10. Kādiem veseliem skaitļiem a un b izpildās sekojošā vienādība?

$$\frac{1}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}=1$$

Atrisinājums:
Pārveidojam sākotnējo vienādību
$b+a^2+1=ab$
$b=\frac{a^2+1}{a-1}=\frac{a^2-1+2}{a-1}=\frac{(a-1)(a+1)+2}{a-1}=a+1+\frac{2}{a-1}$
Lai b būtu vesels, 2 jādalās ar $a-1$. Vienīgie pozitīvie skaitļa 2 dalītāji ir 1 un 2, attiecīgi $a=2$ vai $a=3$. Aprēķinot b, skaitļu pārim (a,b) iegūstam divus vienādības atrisinājumus pozitīvos veselos skaitļos - $(2,5)$ un $(3,5)$. Ja apskatām arī negatīvos dalītājus -2 un -1, attiecīgi $a=-1$ vai $a=0$. Taču tā kā izteiksme $1/a$ nav definēta, ja $a=0$, atliek tikai viens risinājums negatīvos veselos skaitļos: $(a,b)=(-1,-1)$.

11. Dalīšanos ar 7 var pārbaudīt šādi: noņemam dotajam skaitlim pēdējo ciparu c un atņemam no iegūtā skaitļa divreiz c. Atkārtojam šo procedūru, līdz iegūstam skaitli, par kura dalīšanos ar 7 mēs zinām. Piemēram, lai pārbaudītu, vai 525 dalās ar 7, apskatām $52-2\cdot 5=42$. Šis dalās ar 7, tātad sākotnējais 525 arī dalās. Izskaidrot, kādēļ šī metode strādā!

Atrisinājums:
Ar a apzīmēsim skaitli, ko iegūst, dotajam skaitlim noņemot pēdējo ciparu. Pietiek pierādīt, ka $10a+c$ dalās ar 7 tad un tikai tad ($\Leftrightarrow$), ja $a-2c$ dalās ar 7 (pieraksta $7|a-2c$). Tā kā $7|21a$, tad $7|a-2c \Leftrightarrow 7|21a-(a-2c)=20a+2c=2(10a+c) \Leftrightarrow 7|10a+c$, jo 7 un 2 ir savstarpēji pirmskaitļi (reizināšana ar 2 neietekmē dalīšanos ar 7).

12. Cik veidos uz 8×8 šaha laukuma var izvietot 8 vienādus torņus tā, lai tie viens otru neapdraudētu? Torņi apdraud viens otru, ja tie atrodas uz vienas un tās pašas laukuma kolonnas vai rindas.

Atrisinājums:
Pirmo torni mēs varam novietot jebkurā no 64 (jeb 8^2) laucıņiem. Tas apdraudēs vienu pilnu kolonnu un vienu rindu, t.i., $8+(8-1)$ lauciņus. Ievērosim, ka neapdraudēti paliks pāri $8^2-2\cdot 8+1=7^2$ lauciņi (jo $n^2-2n+1=(n-1)^2$). Otro torni mēs tātad varēsim novietot uz 7^2 lauciņiem, trešo uz 6^2 lauciņiem, ..., septīto uz 2^2 lauciņiem, un pedējo uz 1^2 lauciņa. Tātad torņus uz šaha laukuma vāresim novietot $8!^2$ veidos, bet jāņem vērā, ka secība, kādā mēs torņus liekam, nav būtiska, tādēļ kopā būs $\frac{8!^2}{8!}=8!$ dažādi veidi kā novietot torņus uz šaha laukuma.

13. Zane un Andis spēlē krustiņus un nullītes trijās dimensijās, izmantojot $3\times 3\times 3$ kubu, kas sastāv no 27 vienības ($1\times 1\times 1$) kubiņiem. Spēlētāji izdara gājienus pamīšus. Uzvar tas, kurš pirmais kā savus atzīmē trīs vienības kubiņus, kuru centri atrodas uz vienas taisnes. Andis, būdams labs draugs, ļauj Zanei spēli sākt. Vai Zane, pareizi spēlējot, vienmēr varēs uzvarēt? Piedāvājiet savu algoritmu, kā Zanei vienmēr uzvarēt vai Andim panākt, ka Zane nevar uzvarēt.

Atrisinājums:
Zane vienmēr var uzvarēt. Varam izveidot koordinātu sistēmu, kas sastāv no platuma, augstuma, dziļuma. Pirmajā gājienā Zane izvēlas centra kubiņu. Tā koordinātas ir $(2,2,2)$. Neatkarīgi no tā, kuru kubiņu izvēlas Andis, kubu varam pagriezt tā, lai izvēlētais kubiņš būtu koordinātā $(1,1,1)$, $(2,1,1)$ vai $(2,2,1)$. Zane savā nākamajā gājienā izvēlas kubiņu $(1,1,2)$. Andim ir jāizvēlas kubiņš $(3,3,2)$, lai nākamajā gājienā nezaudētu. Zane tālāk izvēlas kubiņu $(2,1,2)$. Tā kā nākamajā gājienā Zane var uzvarēt izvēloties vai nu kubiņu $(3,1,2)$, vai $(2,3,2)$, un Andis šajā gājienā uzvarēt nevar, tad Andis vairs nespēj apturēt Zanes uzvaru.

14. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 5xy - 6y^2 = 3$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.

Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 7.

Atrisinājums:
Labo vienādojuma pusi dalot ar 7, atlikums ir 3. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $7xy+7y^2$ dalās ar 7, varam to pieskaitīt kreisajai pusei, neizmainot tās atlikumu. Iegūstam $x^2+2xy+y^2$, ko var izteikt kā $(x+y)^2$, t.i. kā vesela skaitļa kvadrātu. Šī skaitļa $(x+y)$ atlikums dalot ar 7 var būt 0, 1, 2, 3, 4, 5 vai 6, tad $(x+y)^2$ atlikums ir attiecīgi 0, 1, 4, 2, 2, 4 vai 1. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 7 ir 3, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.
P.S. Iespējams arī risinājums, uzrakstot tabulā visas iespējamās x un y vērtības, un attiecīgās izteiksmes $x^2 - 5xy + y^2$ vērtības pēc moduļa 7.

15. Andis cītīgi seko līdzi basketbola zvaigznes Krista Ziņğa soda metienu statistikai. Andis uzskaita precīzos Krista soda metienus no visiem viņa izdarītajiem soda metieniem. Pēc nospēlētas pussezonas Krista rādītājs precīzajos soda metienos bija zem 80%. Sezonas beigās spēlētāja vidējais rādītājs jau bija virs 80%. Vai sezonas laikā noteikti bija tāds brīdis, kad Kristս Ziņğis bija realizējis tieši 80% no izpildītajiem soda metieniem?

Atrisinājums:
Apskatām trāpīgo metienu skaitu a un neprecīzo metienu skaitu b tieši pirms tā soda metiena, kurš pirmo reizi paceļ rādītāju līdz 80% vai vairāk. Pirms šī (trāpīgā) metiena rādītājs bija $a/(a+b) < 80\% = 4/5$, no kā seko $a < 4b$. Ņemot vērā, ka a un b ir veseli skaitļi, seko arī $a + 1 \leq 4b$. Savukārt pēc šī metiena rādītājs ir $(a+1)/(a+1+b) \geq 4/5$, tātad $a+1 \geq 4b$. Secinām, ka $a+1 = 4b$, līdz ar to pēc šī metiena precizitātes rādītājs ir precīzi $4b/5b = 80\%$. Tātād atbilde ir - jā, noteikti būs brīdis, kad realizēti tieši 80% metienu.