atvērtā kopa 2015

Komandu olimpiāde matemātikā

7. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. *Crémant* šokolādes tāfelītē 48% no svara ir kakao un 20% - rieksti. Cik procentu kakao ir šokolādes masā (neskaitot riekstus)?

Atrisinājums:
Neskaitot riekstus, 80% no tāfelītes svara ir šokolādes masa. Tātad, šajā šokolādes masā $0.48/0.80 = 0.60$ jeb 60% ir kakao.

2. Daniels šodien apēda 4 šokolādes tāfelītes (katra tāfelīte satur 5 ēdamkarotes cukura), 3 lielos šokolādes batoniņus (8 ēdamkarotes cukura katrs) un izdzēra 1 litru kolas (9 ēdamkarotes cukura). Artūrs vēlas uzņemt tieši tādu pašu cukura daudzumu kā Daniels, taču citā kombinācijā. Turklāt Artūrs vēlas nogaršot katru no produktiem, un tie ir jāpatērē veselās vienībās (tāfelīte, batons vai litrs). Vai Artūrs to var izdarīt?

Atrisinājums:
Ievērosim, ka, samazinot patērēto tafelīšu skaitu par vienu un palielinot kolu skaitu par vienu, kopējais uzņemtais cukura daudzums palielināsies par 4 ēdamkarotēm. Tātad, apēdot par divām tāfelītēm mazāk, bet izdzerot par divām kolām vairāk, mēs varēsim aizstāt vienu šokolādes batoniņu, kurā ir 8 ēdamkarotes cukura, nesamazinot kopējo uzņemto cukura daudzumu ($-2 \cdot 5 + 2 \cdot 9 - 1 \cdot 8 = 0$). Attiecīgi Artūrs varēs uzņemt tieši tādu pašu cukura daudzumu kā Daniels, piemēram, patērējot 2 šokolādes tāfelītes, 2 lielos šokolādes batoniņus un 3 litrus kolas.

3. Rinalds no Siguldas veda dēlu uz slimnīcu Rīgā, braucot ar ātrumu 95 km/h. Pie Vangažiem ir aptuveni 1 km garš posms, kurā ātruma ierobežojums ir 70 km/h. Rinalds nolēma ierobežojumu neievērot, un viņu apstādināja policija. Palīdzi Rinaldam pamatot savu lēmumu nesamazināt ātrumu. Cik daudz laika Rinalds ietaupītu, nesamazinot ātrumu līdz 70 km/h?

Atrisinājums:
Ar ātrumu 95 km/h Rinalds 1 km garo posmu nobrauktu $\frac{1}{95}$ stundas jeb $\frac{1}{95} \cdot 60 \cdot 60$ sekundēs. Ar ātrumu 70 km/h - $\frac{1}{70} \cdot 60 \cdot 60$ sekundēs. Ietaupījums ir $(\frac{1}{70} - \frac{1}{95}) \cdot 60 \cdot 60 \approx 13.5$ sekundes.

4. Olga uz nedēļu viesojas Latvijā un vēlas lietot mobilo internetu. Plāns *A* maksā 0.075 €/MB, bet plāns *B* maksā 5€ un ietver līdz 500MB. Kurš plāns ir izdevīgāks? No kā tas ir atkarīgs?

Atrisinājums:
Lietojot plānu *A* mēs par 5€ varētu izmantot $5/0.075 = 5000/75 = 200/3 \approx 66.7$MB datu. Tātad, ja plānots izmantot mazāk par šo apjomu, tad plāns *A* būs izdevīgāks, bet ja vairāk - tad plāns *B* (cerēsim, ka Olgai pietiks ar 500MB).

5. Milo piegādā olas armijai par 5 centiem gabalā. Viņš tās iepērk no "cilvēkiem" Milānā par 7 centiem, lai gan iepriekš tās viņiem pārdevis par 4.25 centiem gab. Kāda ir Milo peļņa par katru olu, ja viņš sākotnēji tās iepērk Sicīlijā par 1 centu gab., un "cilvēki" Milānā ir viņš pats?

Atrisinājums:
Pavisam vienkārši rēķinot, varam no 5 centiem, ko samaksā armija, atņemt 1 centu sākotnējās izmaksas. Tātad peļņa ir 4 centi par olu.
Varam arī sadalīt pa soļiem: Peļņa no pārdošanas "cilvēkiem" Milānā ir $4.25 - 1 = 3.25$ centi par olu. Tad viņš zaudē 2 centus, jo armija samaksā tikai 5¢, bet "cilvēkiem" Milānā samaksāti 7¢. Taču jāatceras, ka "cilvēki" Milānā ir viņš pats un tie nopelnīja $7 - 4.25 = 2.75$ centus. Kopumā sanāk $3.25 + 2.75 - 2 = 4$ centi, kā arī būtu jābūt.

Uzdevuma stāsts ņemts no Joseph Heller grāmatas "Catch-22". Milo olas Milānā "pirka" par 7 centiem, lai sajauktu konkurentiem prātu (un nestāstītu, kur tās patiesībā dabū).

6. Andis un Edgars ir ieradušies uz ikgadējo talku. Viņu uzdevums ir pa vienai pārnest uz citu vietu 16 lielas un 10 mazas kastes. Tabulā norādīts, cik laika katram no puišiem vajag, lai pārvietotu katra veida kasti. Kāds ir ātrākais laiks, kurā Andis un Edgars var pabeigt viņiem uzticēto uzdevumu?

	Andis	Edgars
Lielā kaste	6 minūtes	5 minūtes
Mazā kaste	2 minūtes	3 minūtes

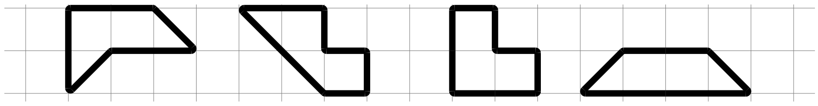
Atrisinājums:
Andis ātrāk nes mazās kastes, bet Edgars - lielās. Ja Andis aiznesīs visas mazās kastes, tad uz to aiziet pirmās $10 \cdot 2 = 20$min, Edgars tikmēr aiznesīs 4 lielās kastes. Vēl atliek 12 lielās kastes, no kurām nākamajās 30 minūtēs E aiznesīs 6, bet A 5. Pēdējo kasti aiznes Edgars, un šajā variantā kopumā paiet 55 minūtes.

Ja Andis aiznes 9 mazās kastes, tad uz to aiziet pirmās $9 \cdot 2 = 18$min, Edgars tikmēr aiznesīs vienu mazo un 3 lielās kastes ($1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 18$). Atliek 13 lielās kastes, no kurām E 35min aiznesīs 7 un A 36min aiznesīs 6. Šajā variantā kopumā paiet 54 minūtes. Šis arī ir labākais risinājums - jo, palielinot mazo kastu skaitu, ko nes Edgars, viņam būtu jāsamazina lielo kastu skaits (lai iegūtu mazāku laiku nekā 54min), tātad Andis nestu vairāk lielās. Pašreizējā risinājumā Anda un Edgara nešanas laiku summa ir $53 + 54 = 107$. Katra papildu mazā kaste, ko nestu Edgars nevis Andis, palielinātu šo summu par 1, tāpat arī katra papildu lielā kaste, ko nestu Andis nevis Edgars. Tātad kopsumma būtu vismaz 109, līdz ar to lielākais starp Edgara un Anda laikiem būtu vismaz $109/2 > 54$min.

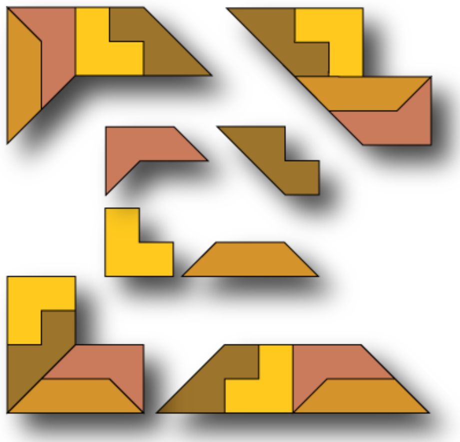
7. Cementa ražotāja SIA «Cemex» realizējusi pilotprojektu, kaļķakmens karjerā «Kūmas» uzbūvējot 500 metrus garu ceļa posmu no valčbetona, un ir gatava sadarboties ar ceļu būves uzņēmumiem un VAS «Latvijas Valsts ceļi» šādu ceļu būvniecībā Latvijā. «Cemex» valdes loceklis Ēriks Maikls Trusevics stāstīja, ka betona ceļu izmaksas ir par aptuveni 20% lētākas nekā asfalta ceļu izmaksas, piemēram, šī eksperimentālā ceļa izmaksas bija 45 eiro par kvadrātmetru. Cik izmaksāja šis ceļš? Izskaidro pieņēmumus! Cik izmaksātu šāds asfalta ceļš?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka ceļš ir divjoslu ar joslas platumu 4 metri. Kopējais platums tad ir 8 metri. Tika uzbūvēti $500 \cdot 8 = 4000$ m^2 ceļa, kas izmaksāja $45 \cdot 4000 = 180'000$ eiro. Tā kā betona ceļa izmaksas ir par 20% mazākas nekā asfalta, tās sastāda 80% no asfalta izmaksām (pieņemot, ka asfalta risinājumā nemainās ceļa platums). Asfalta ceļš attiecīgi maksātu $180'000/0.8 = 225'000$ eiro.

8. Izmantojot visas četras zemāk dotās figūras, katru vienu reizi, izveido figūru, kurai ir tādi pati forma kā kādai no dotajām. Ja vari, uzrādi, kā izveidot visas četras! Figūras drīkst rotēt un apgriezt otrādi.



Atrisinājums:



Šo un citus piemērus var atrast `wikipedia.org/wiki/Self-tiling_tile_set`.

9. Ražojot cementu, tiek izmantoti vairāki materiāli (to proporcijas cementā skat. zemāk). Kvalitātes departamenta vadītāja Eva vēlējās atbrīvoties no ražošanas blakus produkta - ķīmiskiem putekļiem (BPD), pievienojot to cementam. Diemžēl BPD ir augsts hlora saturs - 11.3614%, tādēļ to var pievienot tikai ierobežotā daudzumā. Kāds ir maksimālais daudzums BPD (procentos no jauniegūtā cementa), ko Eva varētu pievienot cementam, ja atļautais hlora daudzums cementā ir 0.0085% un pārējo materiālu hlora saturs ir norādīts tabulā?

Materiāls	Proporcija cementā	Hlora saturs
Klinkers	80.0%	0.0009%
Ģipšakmens	5.0%	-
Šlaga	5.0%	0.0005%
Kaļķakmens	10.0%	0.0065%

Atrisinājums:
Vienkāršības labad hlora saturu katrā no materiāliem izteiksim miljonajās daļās (ppm). No tabulā dotās informācijas iegūstam, ka normālā cementā hlora saturs ir 13.95 ppm. Ar $x \in [0;1]$ apzīmēsim maksimālo BPD proporciju jaunajā cementā. Tad

$$\begin{aligned}
13.95(1-x) + 113614x &= 85 \\
13.95 - 13.95x + 113614x &= 85 \\
113600.05x &= 71.05 \\
x &\approx 0.000625
\end{aligned}$$

Tātad maksimāli varēs pievienot aptuveni 0.0625% BPD no kopējā jaunā cementa daudzuma.

10. Sanāksmē piedalās 27 dalībnieki. Katram no viņiem ir portatīvais dators ar pilnībā uzlādētu bateriju, kura var izturēt 4 stundas bez lādēšanas (neatkarīgi no darbībām, kas tiek veiktas datorā), un datora lādētājs. Sanāksmes telpā ir 3 elektrības rozetes. Cik ilgi var notikt sanāksme, lai nevienam darbiniekam neizlādētos dators, ja zināms, ka bateriju no pilnīgi tukšas līdz pilnai var uzlādēt pusstundā (pat tad, ja tas tiek lietots), turklāt tā lādējas vienmērīgi? Pieņemam, ka lādētāju pārslēgšana laiku neaizņem.

Atrisinājums:
Mērīsim kopējo atlikušo energijas daudzumu "baterijās". Ievērosim, ka 4 stundu laikā no 3 rozetēm var uzlādēt ne vairāk kā $3 \cdot 4/0.5 = 24$ baterijas. Savukārt 4 stundu laikā izladēsies vismaz 24 baterijas (neskaitot trīs, kas pieslēgtas rozetēm un nelādējās ārā). Tātad, precīzi rīkojoties, vajadzētu izdoties 27 dalībnieku datorus uzturēt ieslēgtus uz neierobežotu laiku. To varētu panākt, pirmo pusstundu lādējot 1., 2., 3. datoru, otro pusstundu lādējot 4., 5., 6. datoru, ... , sākoties devītajai pusstundai jeb tieši pēc 4 stundām sākot lādēt 25., 26., 27. datoru (tieši pirms tie izlādētos). Pēc tam, desmitajā pusstundā atkal 1., 2., 3. (arī tieši pirms to izlādēšanās) un tālāk turpināt šo 4.5 stundas garo ciklu.

11. Dota ciparu virkne 1234468..., kurā katrs nākamais cipars ir pēdējais cipars no skaitļa, kurš iegūts, reizinot iepriekšējos 4 ciparus. Atrodiet šīs virknes 2015. ciparu!

Atrisinājums:
Paturpinot doto virkni, iegūstam 1234468864628**4468**... Ievērojam, ka no 14. cipara atkārtojas 4 ciparu rinda 4468, kura bija jau sākumā no 4. līdz 7. ciparam. Tā kā katru nākamo ciparu nosaka tikai un vienīgi iepriekšējie 4, tad pēc šiem 4 cipariem sekos tādi paši kā pēc tiem, kas ir rindas sākumā, un veidosies 10 ciparu periods. Tātad, sākot ar ceturto ciparu, veidojas 10 ciparu periods, un 2015. cipars būs otrais šajā periodā ($2015 - 3 - 201 \cdot 10 = 2$). Atbilde ir cipars "4".

12. Pierādiet, ka jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu kvadrātu starpība dalās ar 8.

Atrisinājums:
Apzīmēsim divus brīvi izvēlētus nepāra skaitļus ar $2m+1$ un $2n+1$ (m,n - naturāli). To kvadrātu starpība ir $(2m+1)^2 - (2n+1)^2 = ((2m+1)-(2n+1))((2m+1)+(2n+1)) = (2m-2n)(2m+2n+2) = 4(m-n)(m+n+1)$. Ievērosim, ka skaitļiem $(m-n)$ un $(m+n+1)$ ir atšķirīga paritāte, t.i., viens no tiem ir pāra skaitlis, bet otrs - nepāra, tādēļ to reizinājums dalīsies ar divi un attiecīgi $4(m-n)(m+n+1)$ dalīsies ar 8.

13. Dotas monētas ar 1, 2, 5, 10 un 20 centu nomināliem. Katram skaitlim k ar M_k apzīmēsim mazāko monētu skaitu, kurš nepieciešams, lai samaksātu k centus. Kurš no skaitļiem
$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{2014}, M_{2015}$ ir lielākais?

Atrisinājums:
Sākumā ievērosim, ka skaitā M_k nevar būt iekļautas varāk nekā viena 10, viena 5 un viena 1 centa monēta, jo, ja būtu vismaz divas šādas monētas, tad kopējo monētu skaitu noteikti varētu samazināt, aizvietojot divas no šīm monētām ar vienu 20, 10 vai 2 centu monētu, attiecīgi. Līdzīgi mēs varam secināt, ka nebūs vairāk par divām 2 centu monētām, jo trīs 2 centu monētas varētu aizstāt ar vienu 5 centu monētu un vienu 1 centa monētu, tādējādi samazinot kopējo monētu skaitu. Arī 1 centa monēta nevarēs būt kopā ar divām 2 centu monētām, jo tad šīs trīs monētas varēs aizvietot ar vienu 5 centu monētu. Tātad lielākais monētu skaits no šiem nomināliem ir 4 monētas.
Uz 20 centu monētām šāds limits neattiecas, tādēļ vislielākais M_k būs tam skaitlim k, kuram nepieciešams vislielākais 20 centu monētu skaits. Šis skaits nevar būt lielāks par $2015/20 = 100$ (atl. 15). No pārējām monētām mēs varam pievienot ne vairāk kā 4 monētas. Tās pievienojot, iegūtais skaitlis nebūs mazāks par $20 \cdot 100 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2018$. Tātad monētu skaits 104 vai vairāk nav iespējams. Turpretim varam aprēķināt, ka $M_{1998} = M_{1999} = M_{2008} = M_{2009} = M_{2013} = M_{2014} = 103$. Šie arī ir lielākie no skaitļiem M_k, $k \leq 2015$.

14. Andis cītīgi seko līdzi basketbola zvaigznes Andra Biedra soda metienu statistikai. Andis uzskaita precīzos Andra soda metienus no visiem viņa izdarītajiem soda metieniem. Pēc nospēlētas pussezonas Andra rādītājs precīzajos soda metienos bija zem 50%. Sezonas beigās spēlētāja vidējais rādītājs jau bija virs 50%. Vai sezonas laikā noteikti bija tāds brīdis, kad Andris Biedrs bija realizējis tieši 50% no izpildītajiem soda metieniem?

Atrisinājums:

Apskatām trāpīgo metienu skaitu a un neprecīzo metienu skaitu b tieši pirms tā soda metiena, kurš pirmo reizi paceļ rādītāju līdz 50% vai vairāk. Tad $a < b$, jo pirms šī (trāpīgā) metiena rādītājs bija $a/(a+b) < 50\% = 1/2$. Ņemot vērā, ka a un b ir veseli skaitļi, seko arī $a+1 \leq b$. Savukārt pēc šī metiena rādītājs ir $(a+1)/(a+1+b) \geq 1/2$, tātad $a+1 \geq b$. Secinām, ka $a+1 = b$, līdz ar to pēc šī metiena precizitātes rādītājs ir precīzi 50%. Tātād atbilde ir - jā, noteikti būs brīdis, kad realizēti tieši 50% metienu.

15. Zane un Andis spēlē krustiņus un nullītes trijās dimensijās, izmantojot $3 \times 3 \times 3$ kubu, kas sastāv no 27 vienības $(1 \times 1 \times 1)$ kubiņiem. Spēlētāji izdara gājienus pamīšus. Uzvar tas, kurš pirmais kā savus atzīmē trīs vienības kubiņus, kuru centri atrodas uz vienas taisnes. Andis, būdams labs draugs, ļauj Zanei spēli sākt. Vai Zane, pareizi spēlējot, vienmēr varēs uzvarēt? Piedāvājiet savu algoritmu, kā Zanei vienmēr uzvarēt vai Andim panākt, ka Zane nevar uzvarēt.

Atrisinājums:

Zane vienmēr var uzvarēt. Varam izveidot koordinātu sistēmu, kas sastāv no platuma, augstuma, dziļuma. Pirmajā gājienā Zane izvēlas centra kubiņu. Tā koordinātas ir $(2,2,2)$. Neatkarīgi no tā, kuru kubiņu izvēlas Andis, kubu varam pagriezt tā, lai izvēlētais kubiņš būtu koordinātā $(1,1,1)$, $(2,1,1)$ vai $(2,2,1)$. Zane savā nākamajā gājienā izvēlas kubiņu $(1,1,2)$. Andim ir jāizvēlas kubiņš $(3,3,2)$, lai nākamajā gājienā nezaudētu. Zane tālāk izvēlas kubiņu $(2,1,2)$. Tā kā nākamajā gājienā Zane var uzvarēt izvēloties vai nu kubiņu $(3,1,2)$, vai $(2,3,2)$, un Andis šajā gājienā uzvarēt nevar, tad Andis vairs nespēj apturēt Zanes uzvaru.

atvērtā kopa 2015

Komandu olimpiāde matemātikā

8. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. *Crémant* šokolādes tāfelītē 48% no svara ir kakao un 20% - rieksti. Cik procentu kakao ir šokolādes masā (neskaitot riekstus)?

Atrisinājums:
Neskaitot riekstus, 80% no tāfelītes svara ir šokolādes masa. Tātad, šajā šokolādes masā $0.48/0.80 = 0.60$ jeb 60% ir kakao.

2. Rinalds no Siguldas veda dēlu uz slimnīcu Rīgā, braucot ar ātrumu 95 km/h. Pie Vangažiem ir aptuveni 1 km garš posms, kurā ātruma ierobežojums ir 70 km/h. Rinalds nolēma ierobežojumu neievērot, un viņu apstādināja policija. Palīdzi Rinaldam pamatot savu lēmumu nesamazināt ātrumu. Cik daudz laika Rinalds ietaupītu, nesamazinot ātrumu līdz 70 km/h?

Atrisinājums:
Ar ātrumu 95 km/h Rinalds 1 km garo posmu nobrauktu $\frac{1}{95}$ stundas jeb $\frac{1}{95} \cdot 60 \cdot 60$ sekundēs. Ar ātrumu 70 km/h - $\frac{1}{70} \cdot 60 \cdot 60$ sekundēs. Ietaupījums ir $(\frac{1}{70} - \frac{1}{95}) \cdot 60 \cdot 60 \approx 13.5$ sekundes.

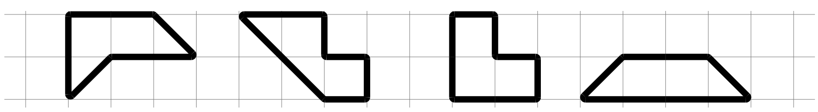
3. Olga uz nedēļu viesojas Latvijā un vēlas lietot mobilo internetu. Plāns *A* maksā 0.075 €/MB, bet plāns *B* maksā 5€ un ietver līdz 500MB. Kurš plāns ir izdevīgāks? No kā tas ir atkarīgs?

Atrisinājums:
Lietojot plānu *A* mēs par 5€ varētu izmantot $5/0.075 = 5000/75 = 200/3 \approx 66.7$MB datu. Tātad, ja plānots izmantot mazāk par šo apjomu, tad plāns *A* būs izdevīgāks, bet ja vairāk - tad plāns *B* (cerēsim, ka Olgai pietiks ar 500MB).

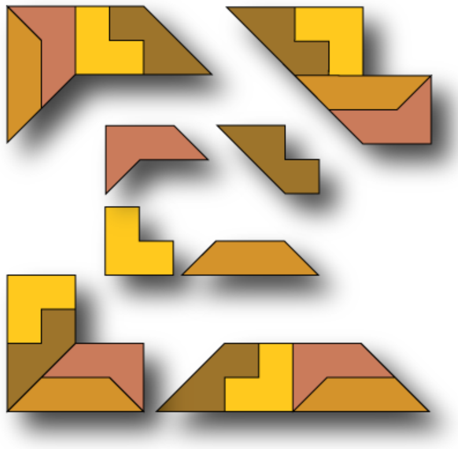
4. Milo piegādā olas armijai par 5 centiem gabalā. Viņš tās iepērk no "cilvēkiem" Milānā par 7 centiem, lai gan iepriekš tās viņiem pārdevis par 4.25 centiem gab. Kāda ir Milo peļņa par katru olu, ja viņš sākotnēji tās iepērk Sicīlijā par 1 centu gab., un "cilvēki" Milānā ir viņš pats?

Atrisinājums:
Pavisam vienkārši rēķinot, varam no 5 centiem, ko samaksā armija, atņemt 1 centu sākotnējās izmaksas. Tātad peļņa ir 4 centi par olu.
Varam arī sadalīt pa soļiem: Peļņa no pārdošanas "cilvēkiem" Milānā ir $4.25 - 1 = 3.25$ centi par olu. Tad viņš zaudē 2 centus, jo armija samaksā tikai 5¢, bet "cilvēkiem" Milānā samaksāti 7¢. Taču jāatceras, ka "cilvēki" Milānā ir viņš pats un tie nopelnīja $7 - 4.25 = 2.75$ centus. Kopumā sanāk $3.25 + 2.75 - 2 = 4$ centi, kā arī būtu jābūt.
Uzdevuma stāsts ņemts no Joseph Heller grāmatas "Catch-22". Milo olas Milānā "pirka" par 7 centiem, lai sajauktu konkurentiem prātu (un nestāstītu, kur tās patiesībā dabū).

5. Izmantojot visas četras zemāk dotās figūras, katru vienu reizi, izveido figūru, kurai ir tādi pati forma kā kādai no dotajām. Ja vari, uzrādi, kā izveidot visas četras! Figūras drīkst rotēt un apgriezt otrādi.

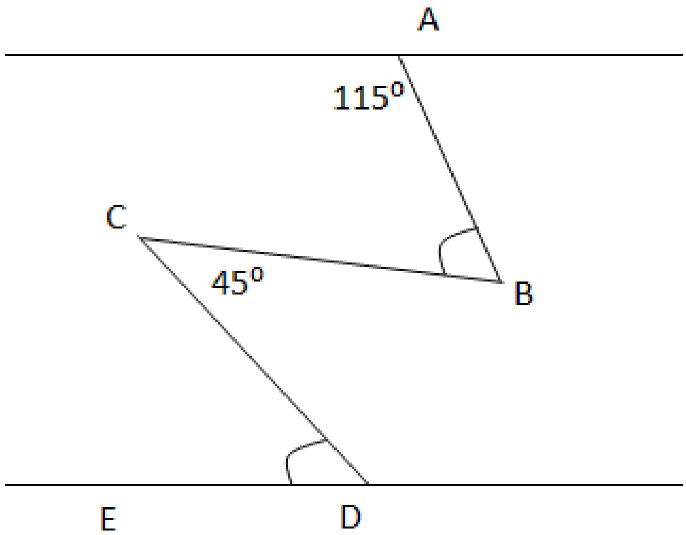


Atrisinājums:

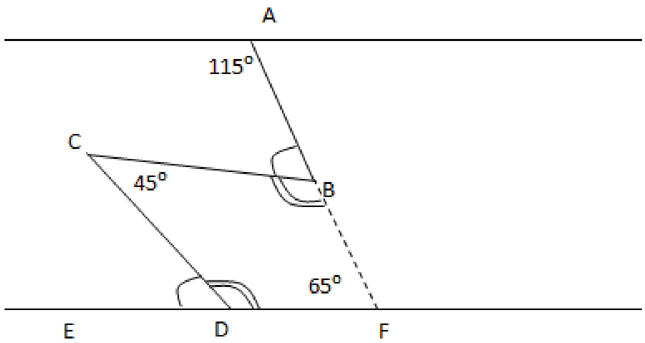


Šo un citus piemērus var atrast `wikipedia.org/wiki/Self-tiling_tile_set`.

6. Andis un Zane upi ar paralēliem krastiem šķērsoja pa maršutu kā parādīts zīmējumā. Nosakiet leņķi ABC, ja zināms, ka leņķi ABC un CDE ir savstarpēji vienādi.



Atrisinājums:
Pagarinām taisni AB un iegūstam $\angle AFE$, kurš ir iekšējs vienpusleņķis ar leņķi A. Tātad $\angle AFE = 180° - \angle A = 65°$. Tā kā $\angle ABC = \angle CDE$, tad arī šo leņķu blakusleņķi ir vienādi, $\angle CBF = \angle CDF$. Varam aprēķināt $\angle CBF$, izmantojot, ka kvadrāta CBFD leņķu summa ir $360°$. $\angle CBF = \frac{360° - \angle DCB - \angle AFE}{2} = \frac{250°}{2} = 125°$. Attiecīgi $\angle ABC = 180° - 125° = 55°$.



7. Pierādiet, ka jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu kvadrātu starpība dalās ar 8.

Atrisinājums:
Apzīmēsim divus brīvi izvēlētus nepāra skaitļus ar $2m+1$ un $2n+1$ (m,n - naturāli). To kvadrātu starpība ir $(2m+1)^2-(2n+1)^2=((2m+1)-(2n+1))((2m+1)+(2n+1))=(2m-2n)(2m+2n+2)=4(m-n)(m+n+1)$. Ievērosim, ka skaitļiem $(m-n)$ un $(m+n+1)$ ir atšķirīga paritāte, t.i., viens no tiem ir pāra skaitlis, bet otrs - nepāra, tādēļ to reizinājums dalīsies ar divi un attiecīgi $4(m-n)(m+n+1)$ dalīsies ar 8.

8. Atrodiet ciparus a, b, c tā, lai $\overline{abc}=a!+b!+c!$.

Zināšanai: Naturālam n, $n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$, bet $0!=1$.
$\overline{abc}$ apzīmē skaitli, ko veido cipari a, b, c norādītajā secībā.
Piemēram, ja $a=1$, $b=2$, $c=3$, tad $\overline{abc}=123$.

Atrisinājums:
$a=1$, $b=4$, $c=5$.

9. Ražojot cementu, tiek izmantoti vairāki materiāli (to proporcijas cementā skat. zemāk). Kvalitātes departamenta vadītāja Eva vēlējās atbrīvoties no ražošanas blakus produkta - ķīmiskiem putekļiem (BPD), pievienojot to cementam. Diemžēl BPD ir augsts hlora saturs - 11.3614%, tādēļ to var pievienot tikai ierobežotā daudzumā. Kāds ir maksimālais daudzums BPD (procentos no jauniegūtā cementa), ko Eva varētu pievienot cementam, ja atļautais hlora daudzums cementā ir 0.0085% un pārējo materiālu hlora saturs ir norādīts tabulā?

Materiāls	Proporcija cementā	Hlora saturs
Klinkers	80.0%	0.0009%
Ģipšakmens	5.0%	-
Šlaga	5.0%	0.0005%
Kaļķakmens	10.0%	0.0065%

Atrisinājums:
Vienkāršības labad hlora saturu katrā no materiāliem izteiksim miljonajās daļās (ppm). No tabulā dotās informācijas iegūstam, ka normālā cementā hlora saturs ir 13.95 ppm. Ar $x\in[0;1]$ apzīmēsim maksimālo BPD proporciju jaunajā cementā. Tad

$$\begin{aligned}13.95(1-x)+113614x&=85\\13.95-13.95x+113614x&=85\\113600.05x&=71.05\\x&\approx 0.000625\end{aligned}$$

Tātad maksimāli varēs pievienot aptuveni 0.0625% BPD no kopējā jaunā cementa daudzuma.

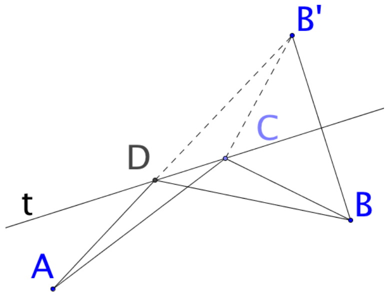
10. Sanāksmē piedalās 27 dalībnieki. Katram no viņiem ir portatīvais dators ar pilnībā uzlādētu bateriju, kura var izturēt 4 stundas bez lādēšanas (neatkarīgi no darbībām, kas tiek veiktas datorā), un datora lādētājs. Sanāksmes telpā ir 3 elektrības rozetes. Cik ilgi var notikt sanāksme, lai nevienam darbiniekam neizlādētos dators, ja zināms, ka bateriju no pilnīgi tukšas līdz pilnai var uzlādēt pusstundā (pat tad, ja tas tiek lietots), turklāt tā lādējas vienmērīgi? Pieņemam, ka lādētāju pārslēgšana laiku neaizņem.

Atrisinājums:
Mērīsim kopējo atlikušo energijas daudzumu "baterijās". Ievērosim, ka 4 stundu laikā no 3 rozetēm var uzlādēt ne vairāk kā $3\cdot 4/0.5=24$ baterijas. Savukārt 4 stundu laikā izladēsies vismaz 24 baterijas (neskaitot trīs, kas pieslēgtas rozetēm un nelādējās ārā). Tātad, precīzi rīkojoties, vajadzētu izdoties 27 dalībnieku datorus uzturēt ieslēgtus uz neierobežotu laiku. To varētu panākt, pirmo pusstundu lādējot 1., 2., 3. datoru, otro pusstundu lādējot 4., 5., 6. datoru, ... , sākoties devītajai pusstundai jeb tieši pēc 4 stundām sākot lādēt 25., 26., 27. datoru (tieši pirms tie izlādētos). Pēc tam, desmitajā pusstundā atkal 1., 2., 3. (arī tieši pirms to izlādēšanās) un tālāk turpināt šo 4.5 stundas garo ciklu.

11. Dota taisne t, kas plakni sadala divās daļās, un divi punkti, kas abi atrodas vienā plaknes daļā un neatrodas uz taisnes t. Atrodiet īsāko ceļu starp abiem punktiem tā, lai tas iekļautu arī kādu taisnes t punktu.

Atrisinājums:

Apskatām punktus A un B, kā arī B', kas ir simetrisks punktam B pret doto taisni t. Zināms, ka īsākais ceļš starp diviem punktiem ir nogrieznis. Apskatīsim ceļu caur brīvi izvēlētu punktu C uz taisnes t. Pēc simetrijas redzams, ka $AC + CB = AC + CB'$. Ja C nesakrīt ar D (AB' krustpunkts ar taisni t), tad pēc trijstūra nevienādības redzams, ka $AC + CB = AC + CB' > AB' = AD + DB' = AD + DB$. Tātad īsākais uzdevumā prasītais ceļš ir $AD + DB$.



12. Dotas monētas ar 1, 2, 5, 10 un 20 centu nomināliem. Katram skaitlim k ar M_k apzīmēsim mazāko monētu skaitu, kurš nepieciešams, lai samaksātu k centus. Kurš no skaitļiem $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{2014}, M_{2015}$ ir lielākais?

Atrisinājums:

Sākumā ievērosim, ka skaitā M_k nevar būt iekļautas varāk nekā viena 10, viena 5 un viena 1 centa monēta, jo, ja būtu vismaz divas šādas monētas, tad kopējo monētu skaitu noteikti varētu samazināt, aizvietojot divas no šīm monētām ar vienu 20, 10 vai 2 centu monētu, attiecīgi. Līdzīgi mēs varam secināt, ka nebūs vairāk par divām 2 centu monētām, jo trīs 2 centu monētas varētu aizstāt ar vienu 5 centu monētu un vienu 1 centa monētu, tādējādi samazinot kopējo monētu skaitu. Arī 1 centa monēta nevarēs būt kopā ar divām 2 centu monētām, jo tad šīs trīs monētas varēs aizvietot ar vienu 5 centu monētu. Tātad lielākais monētu skaits no šiem nomināliem ir 4 monētas.

Uz 20 centu monētām šāds limits neattiecas, tādēļ vislielākais M_k būs tam skaitlim k, kuram nepieciešams vislielākais 20 centu monētu skaits. Šis skaits nevar būt lielāks par $2015/20 = 100$ (atl. 15). No pārējām monētām mēs varam pievienot ne vairāk kā 4 monētas. Tās pievienojot, iegūtais skaitlis nebūs mazāks par $20 \cdot 100 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2018$. Tātad monētu skaits 104 vai vairāk nav iespējams. Turpretim varam aprēķināt, ka $M_{1998} = M_{1999} = M_{2008} = M_{2009} = M_{2013} = M_{2014} = 103$. Šie arī ir lielākie no skaitļiem M_k, $k \leq 2015$.

13. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 5xy + y^2 = 8$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.

Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 3.

Atrisinājums:

Labo vienādojuma pusi dalot ar 3, atlikums ir 2. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $3xy$ dalās ar 3, varam to pieskaitīt kreisajai pusei, neizmainot tās atlikumu. Iegūstam $x^2 - 2xy + y^2$, ko var izteikt kā $(x - y)^2$, t.i. kā vesela skaitļa kvadrātu. Šī skaitļa $(x - y)$ atlikums var būt 0, 1 vai 2, tad $(x - y)^2$ atlikums ir attiecīgi 0, 1 vai 1. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 3 ir 2, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.

P.S. Iespējams arī risinājums, uzrakstot tabulā visas iespējamās x un y vērtības, un attiecīgās izteiksmes $x^2 - 5xy + y^2$ vērtības pēc moduļa 3.

14. Andis cītīgi seko līdzi basketbola zvaigznes Andra Biedra soda metienu statistikai. Andis uzskaita precīzos Andra soda metienus no visiem viņa izdarītajiem soda metieniem. Pēc nospēlētas pussezonas Andra rādītājs precīzajos soda metienos bija zem 50%. Sezonas beigās spēlētāja vidējais rādītājs jau bija virs 50%. Vai sezonas laikā noteikti bija tāds brīdis, kad Andris Biedrs bija realizējis tieši 50% no izpildītajiem soda metieniem?

Atrisinājums:
Apskatām trāpīgo metienu skaitu a un neprecīzo metienu skaitu b tieši pirms tā soda metiena, kurš pirmo reizi paceļ rādītāju līdz 50% vai vairāk. Tad $a < b$, jo pirms šī (trāpīgā) metiena rādītājs bija $a/(a+b) < 50\% = 1/2$. Ņemot vērā, ka a un b ir veseli skaitļi, seko arī $a+1 \leq b$. Savukārt pēc šī metiena rādītājs ir $(a+1)/(a+1+b) \geq 1/2$, tātad $a+1 \geq b$. Secinām, ka $a+1 = b$, līdz ar to pēc šī metiena precizitātes rādītājs ir precīzi 50%. Tātād atbilde ir - jā, noteikti būs brīdis, kad realizēti tieši 50% metienu.

15. Zane un Andis spēlē krustiņus un nullītes trijās dimensijās, izmantojot $3 \times 3 \times 3$ kubu, kas sastāv no 27 vienības ($1 \times 1 \times 1$) kubiņiem. Spēlētāji izdara gājienus pamīšus. Uzvar tas, kurš pirmais kā savus atzīmē trīs vienības kubiņus, kuru centri atrodas uz vienas taisnes. Andis, būdams labs draugs, ļauj Zanei spēli sākt. Vai Zane, pareizi spēlējot, vienmēr varēs uzvarēt? Piedāvājiet savu algoritmu, kā Zanei vienmēr uzvarēt vai Andim panākt, ka Zane nevar uzvarēt.

Atrisinājums:
Zane vienmēr var uzvarēt. Varam izveidot koordinātu sistēmu, kas sastāv no platuma, augstuma, dziļuma. Pirmajā gājienā Zane izvēlas centra kubiņu. Tā koordinātas ir $(2,2,2)$. Neatkarīgi no tā, kuru kubiņu izvēlas Andis, kubu varam pagriezt tā, lai izvēlētais kubiņš būtu koordinātā $(1,1,1)$, $(2,1,1)$ vai $(2,2,1)$. Zane savā nākamajā gājienā izvēlas kubiņu $(1,1,2)$. Andim ir jāizvēlas kubiņš $(3,3,2)$, lai nākamajā gājienā nezaudētu. Zane tālāk izvēlas kubiņu $(2,1,2)$. Tā kā nākamajā gājienā Zane var uzvarēt izvēloties vai nu kubiņu $(3,1,2)$, vai $(2,3,2)$, un Andis šajā gājienā uzvarēt nevar, tad Andis vairs nespēj apturēt Zanes uzvaru.

atvērtā kopa 2015

Komandu olimpiāde matemātikā

9. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Olga vēlas uz 2 gadiem abonēt mobilos sakarus. *Cablecom* piedāvā SIM karti par 49 frankiem un ikmēneša maksu 29 Fr. Identiskam plānam *Salt* piedāvā SIM par 1 Fr, mēneša maksu 35 Fr, un pieslēgšanas bonusu 100 Fr (atvilkts no pirmajiem rēķiniem). Kurš piedāvājums ir izdevīgāks?

Atrisinājums:
Aprēķināsim kopējās izmaksas pirmo divu gadu laikā (24 mēneši). Ar *Cablecom*: $49+29\cdot 24=745$. Ar *Salt*: $1+35\cdot 24-100=741$. Tātad *Salt* ir nedaudz izdevīgāks. (Tā kā procentu likmes šobrīd ir tuvu nullei, naudas plūsmas diskontēšanu neveicam.) Var rēķināt arī netieši, balsoties uz starpībām: *Cablecom*$-$*Salt*$=49-(1-100)+24\cdot(29-35)=148-144=4$.

2. Andis un Edgars ir ieradušies uz ikgadējo talku. Viņu uzdevums ir pa vienai pārnest uz citu vietu 16 lielas un 10 mazas kastes. Tabulā norādīts, cik laika katram no puišiem vajag, lai pārvietotu katra veida kasti. Kāds ir ātrākais laiks, kurā Andis un Edgars var pabeigt viņiem uzticēto uzdevumu?

	Andis	Edgars
Lielā kaste	6 minūtes	5 minūtes
Mazā kaste	2 minūtes	3 minūtes

Atrisinājums:
Andis ātrāk nes mazās kastes, bet Edgars - lielās. Ja Andis aiznesīs visas mazās kastes, tad uz to aiziet pirmās $10\cdot 2=20$min, Edgars tikmēr aiznesīs 4 lielās kastes. Vēl atliek 12 lielās kastes, no kurām nākamajās 30 minūtēs E aiznesīs 6, bet A 5. Pēdējo kasti aiznes Edgars, un šajā variantā kopumā paiet 55 minūtes.

Ja Andis aiznes 9 mazās kastes, tad uz to aiziet pirmās $9\cdot 2=18$min, Edgars tikmēr aiznesīs vienu mazo un 3 lielās kastes ($1\cdot 3+3\cdot 5=18$). Atliek 13 lielās kastes, no kurām E 35min aiznesīs 7 un A 36min aiznesīs 6. Šajā variantā kopumā paiet 54 minūtes. Šis arī ir labākais risinājums - jo, palielinot mazo kastu skaitu, ko nes Edgars, viņam būtu jāsamazina lielo kastu skaits (lai iegūtu mazāku laiku nekā 54min), tātad Andis nestu vairāk lielās. Pašreizējā risinājumā Anda un Edgara nešanas laiku summa ir $53+54=107$. Katra papildu mazā kaste, ko nestu Edgars nevis Andis, palielinātu šo summu par 1, tāpat arī katra papildu lielā kaste, ko nestu Andis nevis Edgars. Tātad kopsumma būtu vismaz 109, līdz ar to lielākais starp Edgara un Anda laikiem būtu vismaz $109/2>54$min.

3. Edgars izveidoja 100m garu velotrasi mežā un vēlējās to noklāt ar šķembām, lai neveidotos dubļi. Cik kubikmetru šķembu vajadzētu iegādāties? Veikt un izskaidrot nepieciešamos pieņēmumus!

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka trase ir 50cm plata un vēlamies to noklāt 10cm dziļā kārtā. Pārveidojot vienības metros, iegūstam, ka nepieciešami $100\cdot 0.5\cdot 0.1=5$ m^3 šķembu.

4. Atrodiet ciparus a, b, c tā, lai $\overline{abc}=a!+b!+c!$.

Zināšanai: Naturālam n, $n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$, bet $0!=1$.
$\overline{abc}$ apzīmē skaitli, ko veido cipari a, b, c norādītajā secībā.
Piemēram, ja $a=1$, $b=2$, $c=3$, tad $\overline{abc}=123$.

Atrisinājums:
$a = 1$, $b = 4$, $c = 5$.

5. *Rīgas Satiksme* ir izsludinājusi iepirkumu 20 jaunu zemās grīdas tramvaju iegādei. Orientējošā iepirkuma summa ir 70 miljoni eiro. Iepirkuma procedūra paredz, ka uzvarētājam jāsaražo un jāpiegādā 15 trīs sekciju un 5 četru sekciju zemās grīdas tramvaji. Cik maksātu divu sekciju tramvajs, ja pieņem, ka sekcijas tramvaja galos ir par 125 tūkstošiem dārgākas nekā vidū?

Atrisinājums:
Apzīmēsim ar x gala sekcijas cenu, un ar y vidussekcijas cenu. Tad doto varam izteikt ar vienādībām $x = y + 0.125$ un

$$\begin{aligned} 15(2x + y) + 5(2x + 2y) &= 70 \\ 40x + 25y &= 70 \\ 40(y + 0.125) + 25y &= 70 \\ 65y + 5 &= 70. \end{aligned}$$

Tātad $y = 1$ un $x = 1.125$. Seko, ka divu sekciju tramvajs maksātu $2x = 2.25$ miljonus eiro.

6. Sanāksmē piedalās 30 dalībnieki. Katram no viņiem ir portatīvais dators ar pilnībā uzlādētu bateriju, kura var izturēt 4 stundas bez lādēšanas (neatkarīgi no darbībām, kas tiek veiktas datorā), un datora lādētājs. Sanāksmes telpā ir 3 elektrības rozetes. Vai sanāksme var ilgt divas pilnas diennaktis, lai nevienam darbiniekam neizlādētos dators, ja zināms, ka bateriju no pilnīgi tukšas līdz pilnai var uzlādēt pusstundā (pat tad, ja tas tiek lietots), turklāt tā lādējas vienmērīgi? Pieņemam, ka lādētāju pārslēgšana laiku neaizņem.

Atrisinājums:
Mērīsim kopējo atlikušo energijas daudzumu "baterijās". Ievērosim, ka 4 stundu laikā no 3 rozetēm var uzlādēt ne vairāk kā $3 \cdot 4/0.5 = 24$ baterijas. Savukārt 4 stundu laikā izladēsies vismaz 27 baterijas (neskaitot trīs, kas pieslēgtas rozetēm un nelādējās ārā). Tātad katras 4 stundas atlikusī energija samazināsies par vismaz 3 bateriju tiesu. Ņemot vērā, ka no sākuma mums ir 30 pilnībā uzlādētas baterijas un katras 4 stundas zaudējam vismaz 3 bateriju tiesu, tad ne vēlāk kā pēc $(30/3) \cdot 4 = 40$ stundām visas baterijas būs tukšas. Tātad 2 pilnas diennaktis (48h) sanāksme nevarētu notikt.

7. Dota ciparu virkne 1234468..., kurā katrs nākamais cipars ir pēdējais cipars no skaitļa, kurš iegūts, reizinot iepriekšējos 4 ciparus. Atrodiet šīs virknes 2015. ciparu!

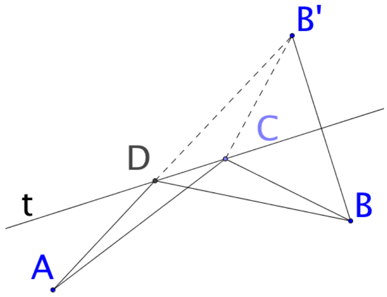
Atrisinājums:
Paturpinot doto virkni, iegūstam 1234468864628**4468**... Ievērojam, ka no 14. cipara atkārtojas 4 ciparu rinda 4468, kura bija jau sākumā no 4. līdz 7. ciparam. Tā kā katru nākamo ciparu nosaka tikai un vienīgi iepriekšējie 4, tad pēc šiem 4 cipariem sekos tādi paši kā pēc tiem, kas ir rindas sākumā, un veidosies 10 ciparu periods. Tātad, sākot ar ceturto ciparu, veidojas 10 ciparu periods, un 2015. cipars būs otrais šajā periodā ($2015 - 3 - 201 \cdot 10 = 2$). Atbilde ir cipars "4".

8. Kuram naturālam skaitlim zem 1000 ir visvairāk naturālu dalītāju? Aprakstiet, kā atradāt šo skaitli. Šoreiz nav nepieciešams pierādīt, ka atrasts labākais iespējamais skaitlis.

Atrisinājums:
Skaitlim 840 ir 32 dalītāji. Dalītāju skaitu var aprēķināt, izsakot doto skaitli pirmreizinātājos. Piemēram, $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Tā dalītājiem ir tie paši pirmreizinātāji, iespējams, zemākās pakāpēs (arī nultajā pakāpē). Tātad dalītāju skaits ir $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

9. Dota taisne t, kas plakni sadala divās daļās, un divi punkti, kas abi atrodas vienā plaknes daļā un neatrodas uz taisnes t. Atrodiet īsāko ceļu starp abiem punktiem tā, lai tas iekļautu arī kādu taisnes t punktu.

Atrisinājums:
Apskatām punktus A un B, kā arī B', kas ir simetrisks punktam B pret doto taisni t. Zināms, ka īsākais ceļš starp diviem punktiem ir nogrieznis. Apskatīsim ceļu caur brīvi izvēlētu punktu C uz taisnes t. Pēc simetrijas redzams, ka $AC + CB = AC + CB'$. Ja C nesakrīt ar D (AB' krustpunkts ar taisni t), tad pēc trijstūra nevienādības redzams, ka $AC + CB = AC + CB' > AB' = AD + DB' = AD + DB$. Tātad īsākais uzdevumā prasītais ceļš ir $AD + DB$.



10. Kāds ir lielākais naturālais skaitlis, ar kuru dalās jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu (kas lielāki par 9) kvadrātu starpība?

Atrisinājums:
Pierādīsim, ka jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu kvadrātu starpība dalās ar 8. Apzīmēsim divus brīvi izvēlētus nepāra skaitļus ar $2m+1$ un $2n+1$ (m,n - naturāli). Tad to kvadrātu starpība būs $((2m+1)^2-(2n+1)^2 = ((2m+1)-(2n+1))((2m+1)+(2n+1)) = (2m-2n)(2m+2n+2) = 4(m-n)(m+n+1)$. Ievērosim, ka skaitļiem $(m-n)$ un $(m+n+1)$ ir atšķirīga paritāte, t.i., viens no tiem ir pāra skaitlis, bet otrs nepāra, tādēļ to reizinājums dalīsies ar divi un attiecīgi $4(m-n)(m+n+1)$ dalīsies ar 8.
Uzrādīsim, ka ar lielāku skaitli par 8 tad jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu kvadrātu starpība nedalīsies. Ievērosim, ka $15^2 - 11^2 = 104 = 8 \cdot 13$. Tātad šo skaitļu kvadrātu starpības dalītāji, kuri būs lielāki par 8, noteikti dalīsies ar 13. Lai kāds no šiem dalītājiem atbilstu uzdevuma nosacījumiem, arī pārējo nepāra skaitļa kvadrātu starpībām vajadzētu dalīties ar 13, bet $13^2 - 11^2 = 48 = 16 \cdot 3$, kas nedalās ar 13. Tātad nebūs tāda dalītajā, kas lielāks par 8, kurš dalītu jebkuru divu dažādu nepāra skaitļu, kas lielāki par 9, kvadrātu starpību.

11. Kādiem veseliem skaitļiem a un b izpildās sekojošā vienādība?

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab} = 1$$

Atrisinājums:
Pārveidojam sākotnējo vienādību
$b + a^2 + 1 = ab$
$b = \frac{a^2+1}{a-1} = \frac{a^2-1+2}{a-1} = \frac{(a-1)(a+1)+2}{a-1} = a + 1 + \frac{2}{a-1}$
Lai b būtu vesels, 2 jādalās ar $a-1$. Vienīgie pozitīvie skaitļa 2 dalītāji ir 1 un 2, attiecīgi $a = 2$ vai $a = 3$. Aprēķinot b, skaitļu pārim (a, b) iegūstam divus vienādības atrisinājumus pozitīvos veselos skaitļos - $(2, 5)$ un $(3, 5)$. Ja apskatām arī negatīvos dalītājus -2 un -1, attiecīgi $a = -1$ vai $a = 0$. Taču tā kā izteiksme $1/a$ nav definēta, ja $a = 0$, atliek tikai viens risinājums negatīvos veselos skaitļos: $(a, b) = (-1, -1)$.

12. Ciemā vidējais rūķīša augums ir 1m. Zināms, ka, garākā rūķīša augumu dalot ar īsākā rūķīša augumu, iegūstam a. Pierādīt, ka visiem rūķīšiem augums ir intervālā $[1/a, a]$.

Atrisinājums:
Apzīmēsim īsākā rūķīša augumu ar x un garākā ar y. Skaidrs, ka $x \leq 1 \leq y$ (ja visi ir garāki vai visi ir īsāki par 1m, tad vidējais augums nevar būt 1m). No dotā $y/x = a$ seko, ka $y = ax \leq a$ un $x = y/a \geq 1/a$. Līdz ar to $1/a \leq x \leq y \leq a$, t.i. visu rūķīšu augumi ir intervālā $[1/a, a]$.

13. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 5xy + y^2 = 8$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.

Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 3.

Atrisinājums:
Labo vienādojuma pusi dalot ar 3, atlikums ir 2. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $3xy$ dalās ar 3, varam to pieskaitīt kreisajai pusei, neizmainot tās atlikumu. Iegūstam $x^2 - 2xy + y^2$, ko var izteikt kā $(x - y)^2$, t.i. kā vesela skaitļa kvadrātu. Šī skaitļa $(x - y)$ atlikums var būt 0, 1 vai 2, tad $(x - y)^2$ atlikums ir attiecīgi 0, 1 vai 1. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 3 ir 2, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.
P.S. Iespējams arī risinājums, uzrakstot tabulā visas iespējamās x un y vērtības, un attiecīgās izteiksmes $x^2 - 5xy + y^2$ vērtības pēc moduļa 3.

14. Andis cītīgi seko līdzi basketbola zvaigznes Andra Biedra soda metienu statistikai. Andis uzskaita precīzos Andra soda metienus no visiem viņa izdarītajiem soda metieniem. Pēc nospēlētas pussezonas Andra rādītājs precīzajos soda metienos bija zem 50%. Sezonas beigās spēlētāja vidējais rādītājs jau bija virs 50%. Vai sezonas laikā noteikti bija tāds brīdis, kad Andris Biedrs bija realizējis tieši 50% no izpildītajiem soda metieniem?

Atrisinājums:
Apskatām trāpīgo metienu skaitu a un neprecīzo metienu skaitu b tieši pirms tā soda metiena, kurš pirmo reizi paceļ rādītāju līdz 50% vai vairāk. Tad $a < b$, jo pirms šī (trāpīgā) metiena rādītājs bija $a/(a + b) < 50\% = 1/2$. Ņemot vērā, ka a un b ir veseli skaitļi, seko arī $a + 1 \leq b$. Savukārt pēc šī metiena rādītājs ir $(a + 1)/(a + 1 + b) \geq 1/2$, tātad $a + 1 \geq b$. Secinām, ka $a + 1 = b$, līdz ar to pēc šī metiena precizitātes rādītājs ir precīzi 50%. Tātād atbilde ir - jā, noteikti būs brīdis, kad realizēti tieši 50% metienu.

15. Zane un Andis spēlē krustiņus un nullītes trijās dimensijās, izmantojot $3 \times 3 \times 3$ kubu, kas sastāv no 27 vienības $(1 \times 1 \times 1)$ kubiņiem. Spēlētāji izdara gājienus pamīšus. Uzvar tas, kurš pirmais kā savus atzīmē trīs vienības kubiņus, kuru centri atrodas uz vienas taisnes. Andis, būdams labs draugs, ļauj Zanei spēli sākt. Vai Zane, pareizi spēlējot, vienmēr varēs uzvarēt? Piedāvājiet savu algoritmu, kā Zanei vienmēr uzvarēt vai Andim panākt, ka Zane nevar uzvarēt.

Atrisinājums:
Zane vienmēr var uzvarēt. Varam izveidot koordinātu sistēmu, kas sastāv no platuma, augstuma, dziļuma. Pirmajā gājienā Zane izvēlas centra kubiņu. Tā koordinātas ir $(2, 2, 2)$. Neatkarīgi no tā, kuru kubiņu izvēlas Andis, kubu varam pagriezt tā, lai izvēlētais kubiņš būtu koordinātā $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ vai $(2, 2, 1)$. Zane savā nākamajā gājienā izvēlas kubiņu $(1, 1, 2)$. Andim ir jāizvēlas kubiņš $(3, 3, 2)$, lai nākamajā gājienā nezaudētu. Zane tālāk izvēlas kubiņu $(2, 1, 2)$. Tā kā nākamajā gājienā Zane var uzvarēt izvēloties vai nu kubiņu $(3, 1, 2)$, vai $(2, 3, 2)$, un Andis šajā gājienā uzvarēt nevar, tad Andis vairs nespēj apturēt Zanes uzvaru.

Komandu olimpiāde matemātikā

10. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Olga vēlas uz 2 gadiem abonēt mobilos sakarus. *Cablecom* piedāvā SIM karti par 49 frankiem un ikmēneša maksu 29 Fr. Identiskam plānam *Salt* piedāvā SIM par 1 Fr, mēneša maksu 35 Fr, un pieslēgšanas bonusu 100 Fr (atvilkts no pirmajiem rēķiniem). Kurš piedāvājums ir izdevīgāks?

Atrisinājums:
Aprēķināsim kopējās izmaksas pirmo divu gadu laikā (24 mēneši). Ar *Cablecom*: $49 + 29 \cdot 24 = 745$. Ar *Salt*: $1 + 35 \cdot 24 - 100 = 741$. Tātad *Salt* ir nedaudz izdevīgāks. (Tā kā procentu likmes šobrīd ir tuvu nullei, naudas plūsmas diskontēšanu neveicam.) Var rēķināt arī netieši, balsoties uz starpībām: *Cablecom*−*Salt*$= 49 - (1 - 100) + 24 \cdot (29 - 35) = 148 - 144 = 4$.

2. Edgars izveidoja 100m garu velotrasi mežā un vēlējās to noklāt ar šķembām, lai neveidotos dubļi. Cik kubikmetru šķembu vajadzētu iegādāties? Veikt un izskaidrot nepieciešamos pieņēmumus!

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka trase ir 50cm plata un vēlamies to noklāt 10cm dziļā kārtā. Pārveidojot vienības metros, iegūstam, ka nepieciešami $100 \cdot 0.5 \cdot 0.1 = 5\ \mathrm{m}^3$ šķembu.

3. Atrodiet ciparus a, b, c tā, lai $\overline{abc} = a! + b! + c!$.

Zināšanai: Naturālam n, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, bet $0! = 1$.
$\overline{abc}$ apzīmē skaitli, ko veido cipari a, b, c norādītajā secībā.
Piemēram, ja $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, tad $\overline{abc} = 123$.

Atrisinājums:
$a = 1$, $b = 4$, $c = 5$.

4. *Rīgas Satiksme* ir izsludinājusi iepirkumu 20 jaunu zemās grīdas tramvaju iegādei. Orientējošā iepirkuma summa ir 70 miljoni eiro. Iepirkuma procedūra paredz, ka uzvarētājam jāsaražo un jāpiegādā 15 trīs sekciju un 5 četru sekciju zemās grīdas tramvaji. Cik maksātu divu sekciju tramvajs, ja pieņem, ka sekcijas tramvaja galos ir par 125 tūkstošiem dārgākas nekā vidū?

Atrisinājums:
Apzīmēsim ar x gala sekcijas cenu, un ar y vidussekcijas cenu. Tad doto varam izteikt ar vienādībām $x = y + 0.125$ un

$$\begin{aligned} 15(2x + y) + 5(2x + 2y) &= 70 \\ 40x + 25y &= 70 \\ 40(y + 0.125) + 25y &= 70 \\ 65y + 5 &= 70. \end{aligned}$$

Tātad $y = 1$ un $x = 1.125$. Seko, ka divu sekciju tramvajs maksātu $2x = 2.25$ miljonus eiro.

5. Doti $n \geq 2$ pozitīvi skaitļi. Kas ir lielāks: šo skaitļu summas kvadrāts, vai arī šo skaitļu kvadrātu summa?

Atrisinājums:

Atverot iekavas summas kvadrātam, iegūstam gan katra skaitļa kvadrātu, gan arī citus reizinājumus, kas visi ir pozitīvi. Tātad, summas kvadrāts ir lielāks (stingra nevienādība).

$$\begin{aligned}(x_1 + \ldots + x_n)^2 &= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + \ldots x_2x_n + \ldots + x_nx_{n-1} + x_n^2 \\ &> x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.\end{aligned}$$

To pašu ir iespējams pierādīt ar indukcijas palīdzību. Indukcijas bāze $n = 2$:

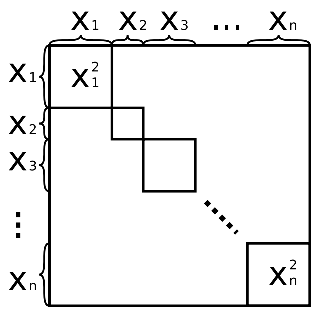
$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > x_1^2 + x_2^2.$$

Pieņemot, ka nevienādība izpildās kādam $n \geq 2$, pierādīsim, ka tā ir spēkā arī $n + 1$:

$$\begin{aligned}(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1})^2 &= (x_1 + \ldots + x_n)^2 + 2(x_1 + \ldots + x_n)x_{n+1} + x_{n+1}^2 \\ &> (x_1 + \ldots + x_n)^2 + x_{n+1}^2 > x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2.\end{aligned}$$

Pēdējā nevienādībā izmantots induktīvais pieņēmums.

Šeit rezultāts attēlots arī ģeometriski:



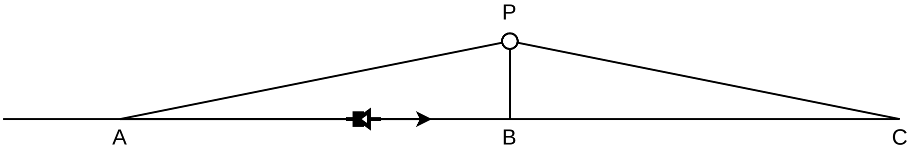
6. Sanāksmē piedalās 30 dalībnieki. Katram no viņiem ir portatīvais dators ar pilnībā uzlādētu bateriju, kura var izturēt 4 stundas bez lādēšanas (neatkarīgi no darbībām, kas tiek veiktas datorā), un datora lādētājs. Sanāksmes telpā ir 3 elektrības rozetes. Vai sanāksme var ilgt divas pilnas diennaktis, lai nevienam darbiniekam neizlādētos dators, ja zināms, ka bateriju no pilnīgi tukšas līdz pilnai var uzlādēt pusstundā (pat tad, ja tas tiek lietots), turklāt tā lādējas vienmērīgi? Pieņemam, ka lādētāju pārslēgšana laiku neaizņem.

Atrisinājums:

Mērīsim kopējo atlikušo energijas daudzumu "baterijās". Ievērosim, ka 4 stundu laikā no 3 rozetēm var uzlādēt ne vairāk kā $3 \cdot 4/0.5 = 24$ baterijas. Savukārt 4 stundu laikā izladēsies vismaz 27 baterijas (neskaitot trīs, kas pieslēgtas rozetēm un nelādējās ārā). Tātad katras 4 stundas atlikusī energija samazināsies par vismaz 3 bateriju tiesu. Ņemot vērā, ka no sākuma mums ir 30 pilnībā uzlādētas baterijas un katras 4 stundas zaudējam vismaz 3 bateriju tiesu, tad ne vēlāk kā pēc $(30/3) \cdot 4 = 40$ stundām visas baterijas būs tukšas. Tātad 2 pilnas diennaktis (48h) sanāksme nevarētu notikt.

7. Pēc vēsturiski ātrākās kosmosa kuģa palaišanas 2006. gadā, *New Horizons* šī gada 14. jūlijā palidoja garām Plūtonam 12 500 km attālumā. Zonde lidoja ar ātrumu 49 350 km/h un lielāko daļu dienas pavadīja, uzņemot Plūtona attēlus. Pieņemot, ka zonde lidoja taisni un ar nemainīgu ātrumu, aprēķini, cik ilgi bija iespēja uzņemt attēlus mazāk kā 40 000 km attālumā no Plūtona!

Atrisinājums:



Shematiski attēlots: punkts P ir Plūtons, zonde lido pa taisni AC un vistuvākais punkts ir B. Tātad $PB \perp AC$ un ΔABP ir taisnleņķa. Punktus A un C atliekam tieši 40 tūkstošu km (lietosim šādas vienības) attālumā no Plūtona, uz zondes trajektorijas. Tātad hipotenūza $|PA| = 40$ un katete $|PB| = 12.5$. Pēc Pitagora teorēmas aprēķinām otras katetes garumu

$$|AB| = \sqrt{(40^2 - 12.5^2)} = \sqrt{1443.75} \approx 38.$$

Simetrijas dēļ $|BC| = |AB|$. Lai aprēķinātu laiku, ko zonde pavadīja uz nogriežņa $|AC|$, izdalām tā garumu ar zondes ātrumu, iegūstot $76/49.35 \approx 1.54$ stundas jeb 92.4 minūtes.

Acīgākie skolēni pamanīs, ka Plūtons nav punkts, bet gan lode, kurai ir rādiuss. Shematiski varam to attēlot kā riņķa līniju ar rādiusu 1190 km un centru P. Tad taisnleņķa trijstūra ABP katetes BP un hipotenūzas AP garums ir par 1.19 tūkstošiem kilometru lielāks. Attiecīgi,

$$|AB| = \sqrt{(41.19^2 - 13.69^2)} = \sqrt{1509.2} \approx 38.85,$$

un šajā risinājumā atbilde ir $77.7/49.35 \approx 1.575$ stundas jeb 94.5 minūtes.

8. Kuram naturālam skaitlim zem 1000 ir visvairāk naturālu dalītāju? Aprakstiet, kā atradāt šo skaitli. Šoreiz nav nepieciešams pierādīt, ka atrasts labākais iespējamais skaitlis.

Atrisinājums:
Skaitlim 840 ir 32 dalītāji. Dalītāju skaitu var aprēķināt, izsakot doto skaitli pirmreizinātājos. Piemēram, $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Tā dalītājiem ir tie paši pirmreizinātāji, iespējams, zemākās pakāpēs (arī nultajā pakāpē). Tātad dalītāju skaits ir $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

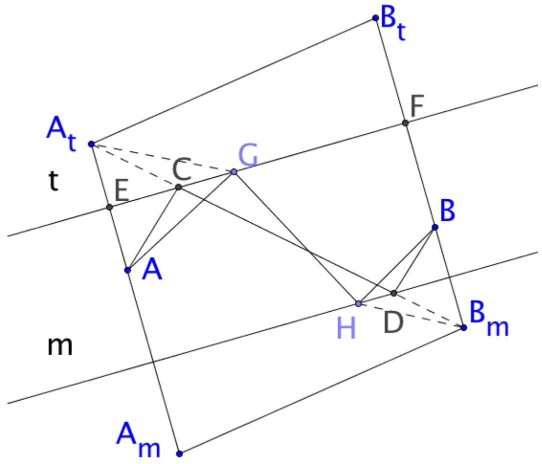
9. Dalīšanos ar 7 var pārbaudīt šādi: noņemam dotajam skaitlim pēdējo ciparu c un atņemam no iegūtā skaitļa divreiz c. Atkārtojam šo procedūru, līdz iegūstam skaitli, par kura dalīšanos ar 7 mēs zinām. Piemēram, lai pārbaudītu, vai 525 dalās ar 7, apskatām $52 - 2 \cdot 5 = 42$. Šis dalās ar 7, tātad sākotnējais 525 arī dalās. Izskaidrot, kādēļ šī metode strādā!

Atrisinājums:
Ar a apzīmēsim skaitli, ko iegūst, dotajam skaitlim noņemot pēdējo ciparu. Pietiek pierādīt, ka $10a + c$ dalās ar 7 tad un tikai tad ($\Leftrightarrow$), ja $a - 2c$ dalās ar 7 (pieraksta $7|a - 2c$). Tā kā $7|21a$, tad $7|a - 2c \Leftrightarrow 7|21a - (a - 2c) = 20a + 2c = 2(10a + c) \Leftrightarrow 7|10a + c$, jo 7 un 2 ir savstarpēji pirmskaitļi (reizināšana ar 2 neietekmē dalīšanos ar 7).

10. Dotas divas paralēlas taisnes t un m un divi punkti plaknes daļā starp šīm taisnēm. Neviens no punktiem neatrodas uz dotajām taisnēm. Atrodiet īsāko ceļu starp abiem punktiem tā, lai tas iekļautu vismaz vienu punktu no taisnes t un vienu punktu no taisnes m.

Atrisinājums:
Dotie punkti - A un B, dotās taisnes - m un t. A_t, A_m, B_t, B_m - attiecīgi punktu A un B simetrisks attēlojums pret taisnēm t un m. C - A_tB_m un t krustpunkts, D - A_tB_m un m krustpunkts (Līdzīgi apskatām gadījumu, ja C - A_mB_t un m krustpunkts, D - A_mB_t un t krustpunkts). G un H - brīvi izvēlēti punkti attiecīgi uz taisnēm t un m, kas nesakrīt ar punktiem C un D. Pēc simetrijas redzams, ka $AC = A_tC$, $AG = A_tG$, $BH = B_mH$, $BD = B_mD$. Tā kā īsākais ceļš starp diviem punktiem ir nogrieznis, tad $A_tB_m < A_tG + GH + HB_m$ un $AC + CD + DB < AG + GH + HB$.

Tā kā $A_tA_m \perp t$ un $B_tB_m \perp t$, tad $A_tA_m \parallel B_tB_m$. Turklāt $A_tA_m = B_tB_m$ un $A_mA_tB_tB_m$ ir paralelograms. Pieņemsim, ka $AE \leq BF$. Tātad $\angle BAA_t \geq 90°$ un $A_tB_m \leq A_mB_t$. Tātad prasītais ceļš caur punktiem C un D ir īsāks nekā ceļš caur jebkuriem citiem punktiem uz taisnēm m un t. Gadījumā, ja $AE > BF$, īsākais ceļš ir caur $A_m B_t$ un attiecīgi taišņu m un t krustpunktiem.



11. Ciemā vidējais rūķīša augums ir 1m. Zināms, ka, garākā rūķīša augumu dalot ar īsākā rūķīša augumu, iegūstam a. Pierādīt, ka visiem rūķīšiem augums ir intervālā $[1/a, a]$.

Atrisinājums:
Apzīmēsim īsākā rūķīša augumu ar x un garākā ar y. Skaidrs, ka $x \leq 1 \leq y$ (ja visi ir garāki vai visi ir īsāki par 1m, tad vidējais augums nevar būt 1m). No dotā $y/x = a$ seko, ka $y = ax \leq a$ un $x = y/a \geq 1/a$. Līdz ar to $1/a \leq x \leq y \leq a$, t.i. visu rūķīšu augumi ir intervālā $[1/a, a]$.

12. Cik veidos uz 8×8 šaha laukuma var izvietot 8 vienādus torņus tā, lai tie viens otru neapdraudētu? Torņi apdraud viens otru, ja tie atrodas uz vienas un tās pašas laukuma kolonnas vai rindas.

Atrisinājums:
Pirmo torni mēs varam novietot jebkurā no 64 (jeb 8^2) laucińiem. Tas apdraudēs vienu pilnu kolonnu un vienu rindu, t.i., $8 + (8 - 1)$ laucińus. Ievērosim, ka neapdraudēti paliks pāri $8^2 - 2\cdot8 + 1 = 7^2$ lauciņi (jo $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$). Otro torni mēs tātad varēsim novietot uz 7^2 lauciņiem, trešo uz 6^2 lauciņiem, ..., septīto uz 2^2 lauciņiem, un pēdējo uz 1^2 lauciņa. Tātad torņus uz šaha laukuma vāresim novietot $8!^2$ veidos, bet jāņem vērā, ka secība, kādā mēs torņus liekam, nav būtiska, tādēļ kopā būs $\frac{8!^2}{8!} = 8!$ dažādi veidi kā novietot torņus uz šaha laukuma.

13. Zane un Andis spēlē krustiņus un nullītes trijās dimensijās, izmantojot $3 \times 3 \times 3$ kubu, kas sastāv no 27 vienības $(1 \times 1 \times 1)$ kubiņiem. Spēlētāji izdara gājienus pamīšus. Uzvar tas, kurš pirmais kā savus atzīmē trīs vienības kubiņus, kuru centri atrodas uz vienas taisnes. Andis, būdams labs draugs, ļauj Zanei spēli sākt. Vai Zane, pareizi spēlējot, vienmēr varēs uzvarēt? Piedāvājiet savu algoritmu, kā Zanei vienmēr uzvarēt vai Andim panākt, ka Zane nevar uzvarēt.

Atrisinājums:
Zane vienmēr var uzvarēt. Varam izveidot koordinātu sistēmu, kas sastāv no platuma, augstuma, dziļuma. Pirmajā gājienā Zane izvēlas centra kubiņu. Tā koordinātas ir $(2, 2, 2)$. Neatkarīgi no tā, kuru kubiņu izvēlas Andis, kubu varam pagriezt tā, lai izvēlētais kubiņš būtu koordinātā $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ vai $(2, 2, 1)$. Zane savā nākamajā gājienā izvēlas kubiņu $(1, 1, 2)$. Andim ir jāizvēlas kubiņš $(3, 3, 2)$, lai nākamajā gājienā nezaudētu. Zane tālāk izvēlas kubiņu $(2, 1, 2)$. Tā kā nākamajā gājienā Zane var uzvarēt izvēloties vai nu kubiņu $(3, 1, 2)$, vai $(2, 3, 2)$, un Andis šajā gājienā uzvarēt nevar, tad Andis vairs nespēj apturēt Zanes uzvaru.

14. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 5xy - 6y^2 = 3$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.

Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 7.

Atrisinājums:
Labo vienādojuma pusi dalot ar 7, atlikums ir 3. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $7xy+7y^2$ dalās ar 7, varam to pieskaitīt kreisajai pusei, neizmainot tās atlikumu. Iegūstam $x^2+2xy+y^2$, ko var izteikt kā $(x+y)^2$, t.i. kā vesela skaitļa kvadrātu. Šī skaitļa $(x+y)$ atlikums dalot ar 7 var būt 0, 1, 2, 3, 4, 5 vai 6, tad $(x+y)^2$ atlikums ir attiecīgi 0, 1, 4, 2, 2, 4 vai 1. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 7 ir 3, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.
P.S. Iespējams arī risinājums, uzrakstot tabulā visas iespējamās x un y vērtības, un attiecīgās izteiksmes $x^2 - 5xy + y^2$ vērtības pēc moduļa 7.

15. Andis cītīgi seko līdzi basketbola zvaigznes Krista Ziņğa soda metienu statistikai. Andis uzskaita precīzos Krista soda metienus no visiem viņa izdarītajiem soda metieniem. Pēc nospēlētas pussezonas Krista rādītājs precīzajos soda metienos bija zem 80%. Sezonas beigās spēlētāja vidējais rādītājs jau bija virs 80%. Vai sezonas laikā noteikti bija tāds brīdis, kad Krists Ziņğis bija realizējis tieši 80% no izpildītajiem soda metieniem?

Atrisinājums:
Apskatām trāpīgo metienu skaitu a un neprecīzo metienu skaitu b tieši pirms tā soda metiena, kurš pirmo reizi paceļ rādītāju līdz 80% vai vairāk. Pirms šī (trāpīgā) metiena rādītājs bija $a/(a+b) < 80\% = 4/5$, no kā seko $a < 4b$. Ņemot vērā, ka a un b ir veseli skaitļi, seko arī $a+1 \leq 4b$. Savukārt pēc šī metiena rādītājs ir $(a+1)/(a+1+b) \geq 4/5$, tātad $a+1 \geq 4b$. Secinām, ka $a+1 = 4b$, līdz ar to pēc šī metiena precizitātes rādītājs ir precīzi $4b/5b = 80\%$. Tātād atbilde ir - jā, noteikti būs brīdis, kad realizēti tieši 80% metienu.

atvērtā kopa 2015

Komandu olimpiāde matemātikā

11. klases uzdevumi un atrisinājumi

1. Olga vēlas uz 2 gadiem abonēt mobilos sakarus. *Cablecom* piedāvā SIM karti par 49 frankiem un ikmēneša maksu 29 Fr. Identiskam plānam *Salt* piedāvā SIM par 1 Fr, mēneša maksu 35 Fr, un pieslēgšanas bonusu 100 Fr (atvilkts no pirmajiem rēķiniem). Kurš piedāvājums ir izdevīgāks?

Atrisinājums:
Aprēķināsim kopējās izmaksas pirmo divu gadu laikā (24 mēneši). Ar *Cablecom*: $49 + 29 \cdot 24 = 745$. Ar *Salt*: $1 + 35 \cdot 24 - 100 = 741$. Tātad *Salt* ir nedaudz izdevīgāks. (Tā kā procentu likmes šobrīd ir tuvu nullei, naudas plūsmas diskontēšanu neveicam.) Var rēķināt arī netieši, balsoties uz starpībām: *Cablecom*−*Salt*$= 49 - (1 - 100) + 24 \cdot (29 - 35) = 148 - 144 = 4$.

2. Cementa ražotāja SIA «Cemex» realizējusi pilotprojektu, kaļķakmens karjerā «Kūmas» uzbūvējot 500 metrus garu ceļa posmu no valčbetona, un ir gatava sadarboties ar ceļu būves uzņēmumiem un VAS «Latvijas Valsts ceļi» šādu ceļu būvniecībā Latvijā. «Cemex» valdes loceklis Ēriks Maikls Trusevics stāstīja, ka betona ceļu izmaksas ir par aptuveni 20% lētākas nekā asfalta ceļu izmaksas, piemēram, šī eksperimentālā ceļa izmaksas bija 45 eiro par kvadrātmetru. Cik izmaksāja šis ceļš? Izskaidro pieņēmumus! Cik izmaksātu šāds asfalta ceļš?

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka ceļš ir divjoslu ar joslas platumu 4 metri. Kopējais platums tad ir 8 metri. Tika uzbūvēti $500 \cdot 8 = 4000$ m^2 ceļa, kas izmaksāja $45 \cdot 4000 = 180'000$ eiro. Tā kā betona ceļa izmaksas ir par 20% mazākas nekā asfalta, tās sastāda 80% no asfalta izmaksām (pieņemot, ka asfalta risinājumā nemainās ceļa platums). Asfalta ceļš attiecīgi maksātu $180'000/0.8 = 225'000$ eiro.

3. Atrodiet ciparus a, b, c tā, lai $\overline{abc} = a! + b! + c!$.

Zināšanai: Naturālam n, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, bet $0! = 1$.
$\overline{abc}$ apzīmē skaitli, ko veido cipari a, b, c norādītajā secībā.
Piemēram, ja $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, tad $\overline{abc} = 123$.

Atrisinājums:
$a = 1$, $b = 4$, $c = 5$.

4. Doti $n \geq 2$ pozitīvi skaitļi. Kas ir lielāks: šo skaitļu summas kvadrāts, vai arī šo skaitļu kvadrātu summa?

Atrisinājums:
Atverot iekavas summas kvadrātam, iegūstam gan katra skaitļa kvadrātu, gan arī citus reizinājumus, kas visi ir pozitīvi. Tātad, summas kvadrāts ir lielāks (stingra nevienādība).

$$\begin{aligned}(x_1 + \ldots + x_n)^2 &= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_1 + x_2^2 + x_2x_3 + \ldots x_2x_n + \ldots + x_nx_{n-1} + x_n^2 \\ &> x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.\end{aligned}$$

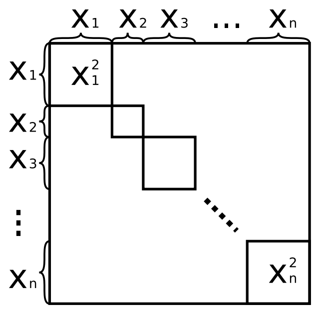
To pašu ir iespējams pierādīt ar indukcijas palīdzību. Indukcijas bāze $n = 2$:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > x_1^2 + x_2^2.$$

Pieņemot, ka nevienādība izpildās kādam $n \geq 2$, pierādīsim, ka tā ir spēkā arī $n+1$:

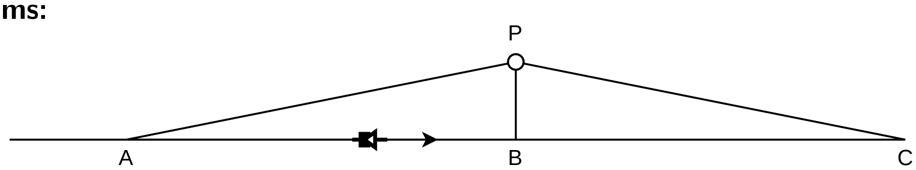
$$\begin{aligned}(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1})^2 &= (x_1 + \ldots + x_n)^2 + 2(x_1 + \ldots + x_n)x_{n+1} + x_{n+1}^2 \\ &> (x_1 + \ldots + x_n)^2 + x_{n+1}^2 > x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2.\end{aligned}$$

Pēdējā nevienādībā izmantots induktīvais pieņēmums.
Šeit rezultāts attēlots arī ģeometriski:



5. Pēc vēsturiski ātrākās kosmosa kuģa palaišanas 2006. gadā, *New Horizons* šī gada 14. jūlijā palidoja garām Plūtonam 12 500 km attālumā. Zonde lidoja ar ātrumu 49 350 km/h un lielāko daļu dienas pavadīja, uzņemot Plūtona attēlus. Pieņemot, ka zonde lidoja taisni un ar nemainīgu ātrumu, aprēķini, cik ilgi bija iespēja uzņemt attēlus mazāk kā 40 000 km attālumā no Plūtona!

Atrisinājums:



Shematiski attēlots: punkts P ir Plūtons, zonde lido pa taisni AC un vistuvākais punkts ir B. Tātad $PB \perp AC$ un ΔABP ir taisnleņķa. Punktus A un C atliekam tieši 40 tūkstošu km (lietosim šādas vienības) attālumā no Plūtona, uz zondes trajektorijas. Tātad hipotenūza $|PA| = 40$ un katete $|PB| = 12.5$. Pēc Pitagora teorēmas aprēķinām otras katetes garumu

$$|AB| = \sqrt{(40^2 - 12.5^2)} = \sqrt{1443.75} \approx 38.$$

Simetrijas dēļ $|BC| = |AB|$. Lai aprēķinātu laiku, ko zonde pavadīja uz nogriežņa $|AC|$, izdalām tā garumu ar zondes ātrumu, iegūstot $76/49.35 \approx 1.54$ stundas jeb 92.4 minūtes.

Acīgākie skolēni pamanīs, ka Plūtons nav punkts, bet gan lode, kurai ir rādiuss. Shematiski varam to attēlot kā riņķa līniju ar rādiusu 1190 km un centru P. Tad taisnleņķa trijstūra ABP katetes BP un hipotenūzas AP garums ir par 1.19 tūkstošiem kilometru lielāks. Attiecīgi,

$$|AB| = \sqrt{(41.19^2 - 13.69^2)} = \sqrt{1509.2} \approx 38.85,$$

un šajā risinājumā atbilde ir $77.7/49.35 \approx 1.575$ stundas jeb 94.5 minūtes.

6. Dota ciparu virkne 1234468..., kurā katrs nākamais cipars ir pēdējais cipars no skaitļa, kurš iegūts, reizinot iepriekšējos 4 ciparus. Atrodiet šīs virknes 2015. ciparu!

Atrisinājums:
Paturpinot doto virkni, iegūstam 1234468864628**4468**... Ievērojam, ka no 14. cipara atkārtojas 4 ciparu rinda 4468, kura bija jau sākumā no 4. līdz 7. ciparam. Tā kā katru nākamo ciparu nosaka tikai un vienīgi iepriekšējie 4, tad pēc šiem 4 cipariem sekos tādi paši kā pēc tiem, kas ir rindas sākumā, un veidosies 10 ciparu periods. Tātad, sākot ar ceturto ciparu, veidojas 10 ciparu periods, un 2015. cipars būs otrais šajā periodā $(2015 - 3 - 201 \cdot 10 = 2)$. Atbilde ir cipars "4".

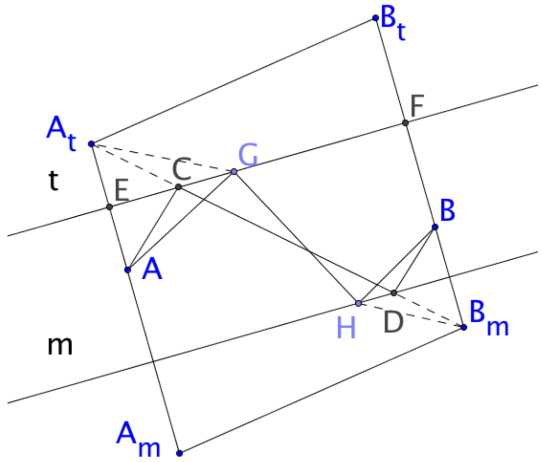
7. Kuram naturālam skaitlim zem 1000 ir visvairāk naturālu dalītāju? Aprakstiet, kā atradāt šo skaitli. Šoreiz nav nepieciešams pierādīt, ka atrasts labākais iespējamais skaitlis.

Atrisinājums:
Skaitlim 840 ir 32 dalītāji. Dalītāju skaitu var aprēķināt, izsakot doto skaitli pirmreizinātājos. Piemēram, $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Tā dalītājiem ir tie paši pirmreizinātāji, iespējams, zemākās pakāpēs (arī nultajā pakāpē). Tātad dalītāju skaits ir $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

8. Dotas divas paralēlas taisnes t un m un divi punkti plaknes daļā starp šīm taisnēm. Neviens no punktiem neatrodas uz dotajām taisnēm. Atrodiet īsāko ceļu starp abiem punktiem tā, lai tas iekļautu vismaz vienu punktu no taisnes t un vienu punktu no taisnes m.

Atrisinājums:
Dotie punkti - A un B, dotās taisnes - m un t. A_t, A_m, B_t, B_m - attiecīgi punktu A un B simetrisks attēlojums pret taisnēm t un m. C - A_tB_m un t krustpunkts, D - A_tB_m un m krustpunkts (Līdzīgi apskatām gadījumu, ja C - A_mB_t un m krustpunkts, D - A_mB_t un t krustpunkts). G un H - brīvi izvēlēti punkti attiecīgi uz taisnēm t un m, kas nesakrīt ar punktiem C un D. Pēc simetrijas redzams, ka $AC = A_tC$, $AG = A_tG$, $BH = B_mH$, $BD = B_mD$. Tā kā īsākais ceļš starp diviem punktiem ir nogrieznis, tad $A_tB_m < A_tG + GH + HB_m$ un $AC + CD + DB < AG + GH + HB$.

Tā kā $A_tA_m \perp t$ un $B_tB_m \perp t$, tad $A_tA_m \parallel B_tB_m$. Turklāt $A_tA_m = B_tB_m$ un $A_mA_tB_tB_m$ ir paralelograms. Pieņemsim, ka $AE \leq BF$. Tātad $\angle BAA_t \geq 90^\circ$ un $A_tB_m \leq A_mB_t$. Tātad prasītais ceļš caur punktiem C un D ir īsāks nekā ceļš caur jebkuriem citiem punktiem uz taisnēm m un t. Gadījumā, ja $AE > BF$, īsākais ceļš ir caur A_mB_t un attiecīgi taišņu m un t krustpunktiem.



9. Adventes kalendāram ir 24 durtiņas. Aiz tieši vienām slēpjas zelta jēriņš, bet aiz pārējām - šokolādes, turklāt visi varianti ir vienādi varbūtīgi. Ilze ļoti grib iegūt zelta jēriņu, taču tas iespējams tikai, ja uzmin īstās durtiņas. Viņa drīkstēs izvēlēties kādas no durtiņām, tad Renārs atvērs 22 no pārējām, parādot, ka tajās ir šokolāde. Tātad paliks tikai divas aizvērtas durtiņas. Ilzei būs iespēja nomainīt savu izvēli. Vai izmantot šo iespēju un mainīt izvēli? Kā tas izmainīs izredzes?

Atrisinājums:
Varbūtība, ka aiz sākotnēji izvēlētajām durtiņām ir zelta jēriņš, ir 1/24, tā attiecīgi ir arī varbūtība "laimēt", nemainot savu izvēli. Savukārt varbutība, ka tas ir aiz kādas no 23 citām ir 23/24. Neatkarīgi no tā, Renārs atvērs 22 no 23 durtiņām. Tātad gadījumā, ja jēriņš bija aiz kādas no šīm 23, tad Renārs atvērs pārējās 22, aiz kurām ir šokolāde, līdz ar to jēriņš paliks aiz tām durtiņām, ko Renārs atstāja neatvērtas - un, mainot savu izvēli, Ilze noteikti "laimēs", bet nemainot - paliks ar šokolādi. Tā kā šis scenārijs notiek ar varbūtību 23/24, tad izvēloties mainīt savu izvēli, Ilze uzlabo savas izredzes 23-kārtīgi.

P.S. Šis ir *Monty Hall* problēmas uzskatāmāks variants. Vairāk lasīt adresē `wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem`.

10. Kādiem veseliem skaitļiem a un b izpildās sekojošā vienādība?

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab} = 1$$

Atrisinājums:
Pārveidojam sākotnējo vienādību
$b + a^2 + 1 = ab$
$b = \frac{a^2+1}{a-1} = \frac{a^2-1+2}{a-1} = \frac{(a-1)(a+1)+2}{a-1} = a + 1 + \frac{2}{a-1}$
Lai b būtu vesels, 2 jādalās ar $a - 1$. Vienīgie pozitīvie skaitļa 2 dalītāji ir 1 un 2, attiecīgi $a = 2$ vai $a = 3$. Aprēķinot b, skaitļu pārim (a, b) iegūstam divus vienādības atrisinājumus pozitīvos veselos skaitļos - $(2, 5)$ un $(3, 5)$. Ja apskatām arī negatīvos dalītājus -2 un -1, attiecīgi $a = -1$ vai $a = 0$. Taču tā kā izteiksme $1/a$ nav definēta, ja $a = 0$, atliek tikai viens risinājums negatīvos veselos skaitļos: $(a, b) = (-1, -1)$.

11. Dalīšanos ar 7 var pārbaudīt šādi: noņemam dotajam skaitlim pēdējo ciparu c un atņemam no iegūtā skaitļa divreiz c. Atkārtojam šo procedūru, līdz iegūstam skaitli, par kura dalīšanos ar 7 mēs zinām. Piemēram, lai pārbaudītu, vai 525 dalās ar 7, apskatām $52 - 2 \cdot 5 = 42$. Šis dalās ar 7, tātad sākotnējais 525 arī dalās. Izskaidrot, kādēļ šī metode strādā!

Atrisinājums:
Ar a apzīmēsim skaitli, ko iegūst, dotajam skaitlim noņemot pēdējo ciparu. Pietiek pierādīt, ka $10a + c$ dalās ar 7 tad un tikai tad ($\Leftrightarrow$), ja $a - 2c$ dalās ar 7 (pieraksta $7|a - 2c$). Tā kā $7|21a$, tad $7|a - 2c \Leftrightarrow 7|21a - (a - 2c) = 20a + 2c = 2(10a + c) \Leftrightarrow 7|10a + c$, jo 7 un 2 ir savstarpēji pirmskaitļi (reizināšana ar 2 neietekmē dalīšanos ar 7).

12. Cik veidos uz 8×8 šaha laukuma var izvietot 8 vienādus torņus tā, lai tie viens otru neapdraudētu? Torņi apdraud viens otru, ja tie atrodas uz vienas un tās pašas laukuma kolonnas vai rindas.

Atrisinājums:
Pirmo torni mēs varam novietot jebkurā no 64 (jeb 8^2) lauciņiem. Tas apdraudēs vienu pilnu kolonnu un vienu rindu, t.i., $8 + (8 - 1)$ lauciņus. Ievērosim, ka neapdraudēti paliks pāri $8^2 - 2 \cdot 8 + 1 = 7^2$ lauciņi (jo $n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$). Otro torni mēs tātad varēsim novietot uz 7^2 lauciņiem, trešo uz 6^2 lauciņiem, ..., septīto uz 2^2 lauciņiem, un pedējo uz 1^2 lauciņa. Tātad torņus uz šaha laukuma vāresim novietot $8!^2$ veidos, bet jāņem vērā, ka secība, kādā mēs torņus liekam, nav būtiska, tādēļ kopā būs $\frac{8!^2}{8!} = 8!$ dažādi veidi kā novietot torņus uz šaha laukuma.

13. Zane un Andis spēlē krustiņus un nullītes trijās dimensijās, izmantojot $3 \times 3 \times 3$ kubu, kas sastāv no 27 vienības $(1 \times 1 \times 1)$ kubiņiem. Spēlētāji izdara gājienus pamīšus. Uzvar tas, kurš pirmais kā savus atzīmē trīs vienības kubiņus, kuru centri atrodas uz vienas taisnes. Andis, būdams labs draugs, ļauj Zanei spēli sākt. Vai Zane, pareizi spēlējot, vienmēr varēs uzvarēt? Piedāvājiet savu algoritmu, kā Zanei vienmēr uzvarēt vai Andim panākt, ka Zane nevar uzvarēt.

Atrisinājums:
Zane vienmēr var uzvarēt. Varam izveidot koordinātu sistēmu, kas sastāv no platuma, augstuma, dziļuma. Pirmajā gājienā Zane izvēlas centra kubiņu. Tā koordinātas ir $(2, 2, 2)$. Neatkarīgi no tā, kuru kubiņu izvēlas Andis, kubu varam pagriezt tā, lai izvēlētais kubiņš būtu koordinātā $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ vai $(2, 2, 1)$. Zane savā nākamajā gājienā izvēlas kubiņu $(1, 1, 2)$. Andim ir jāizvēlas kubiņš $(3, 3, 2)$, lai nākamajā gājienā nezaudētu. Zane tālāk izvēlas kubiņu $(2, 1, 2)$. Tā kā nākamajā gājienā Zane var uzvarēt izvēloties vai nu kubiņu $(3, 1, 2)$, vai $(2, 3, 2)$, un Andis šajā gājienā uzvarēt nevar, tad Andis vairs nespēj apturēt Zanes uzvaru.

14. Pierādīt, ka vienādojumam $x^2 - 5xy - 6y^2 = 3$ nav atrisinājuma, kur x un y ir veseli skaitļi.

Padoms: apskatīt atlikumu, dalot ar 7.

Atrisinājums:
Labo vienādojuma pusi dalot ar 7, atlikums ir 3. Tādam pašam jābūt kreisajā vienādojuma pusē. Tā kā $7xy+7y^2$ dalās ar 7, varam to pieskaitīt kreisajai pusei, neizmainot tās atlikumu. Iegūstam $x^2+2xy+y^2$, ko var izteikt kā $(x+y)^2$, t.i. kā vesela skaitļa kvadrātu. Šī skaitļa $(x+y)$ atlikums dalot ar 7 var būt 0, 1, 2, 3, 4, 5 vai 6, tad $(x+y)^2$ atlikums ir attiecīgi 0, 1, 4, 2, 2, 4 vai 1. Tātad nav iespējams, ka kreisajā pusē atlikums dalot ar 7 ir 3, līdz ar to neeksistē atrisinājums veselos skaitļos.
P.S. Iespējams arī risinājums, uzrakstot tabulā visas iespējamās x un y vērtības, un attiecīgās izteiksmes $x^2 - 5xy + y^2$ vērtības pēc moduļa 7.

15. Andis cītīgi seko līdzi basketbola zvaigznes Krista Ziņģa soda metienu statistikai. Andis uzskaita precīzos Krista soda metienus no visiem viņa izdarītajiem soda metieniem. Pēc nospēlētas pussezonas Krista rādītājs precīzajos soda metienos bija zem 80%. Sezonas beigās spēlētāja vidējais rādītājs jau bija virs 80%. Vai sezonas laikā noteikti bija tāds brīdis, kad Krists Ziņģis bija realizējis tieši 80% no izpildītajiem soda metieniem?

Atrisinājums:
Apskatām trāpīgo metienu skaitu a un neprecīzo metienu skaitu b tieši pirms tā soda metiena, kurš pirmo reizi paceļ rādītāju līdz 80% vai vairāk. Pirms šī (trāpīgā) metiena rādītājs bija $a/(a+b) < 80\% = 4/5$, no kā seko $a < 4b$. Ņemot vērā, ka a un b ir veseli skaitļi, seko arī $a+1 \leq 4b$. Savukārt pēc šī metiena rādītājs ir $(a+1)/(a+1+b) \geq 4/5$, tātad $a+1 \geq 4b$. Secinām, ka $a+1 = 4b$, līdz ar to pēc šī metiena precizitātes rādītājs ir precīzi $4b/5b = 80\%$. Tātād atbilde ir - jā, noteikti būs brīdis, kad realizēti tieši 80% metienu.