atvērtā kopa 2017

Komandu olimpiāde matemātikā
Atrisinājumi 11. klasei

1. Arbūza sastāvā ir 99% ūdens, tomēr, kad to atstāja saulē uz stundu, daļa ūdens iztvaikoja, un tagad tikai 98% arbūza ir ūdens. Kādu daļu sākotnējās masas arbūzs ir zaudējis?

   Risinājums 1:
   Pieņemsim, ka arbūza masa ir 100 arbūzēni, saīsināsim kā 100 az (mērvienība ir izdomāta, bet tā, kā mums interesē tikai masu attiecības, tad mērvienības nav tik svarīgas). Tātad sākumā ūdens sver 99 az un sausais atlikums sver 1 az. Pēc izžūšanas, mums ir 98% ūdens, un tātad 2% sausnes. Sausnes masa nav mainījusies, tātad

   $$2\% = 1 \text{ az}$$

   $$98\% = \text{ ūdens pēc saules}$$

   Reizinam šķērsām un iegūstam, ka ūdens pēc saules $= \frac{1 \cdot 98}{2} = 49$ az. Tātad arbūzs tagad sver $49 + 1 = 50$ az, tātad pazaudēja 50 az, kas atbilst 50% no sākotnējās masas.

   Risinājums 2:
   a - arbūza kopējā masa
   u - ūdens masa arbūzā sākumā
   z - zaudētā ūdens masa

   $$\frac{u}{a} = \frac{99}{100} \Leftrightarrow 100u = 99a$$
   $$\frac{u-z}{a-z} = \frac{98}{100} \Leftrightarrow 100u - 100z = 98a - 98z$$
   $$100u - 98a = 2z \Leftrightarrow 99a - 98a = 2z \Leftrightarrow a = 2z \Leftrightarrow 0.5 \cdot a = z$$

   tātad zudumi z ir puse no sākotnējās masas.

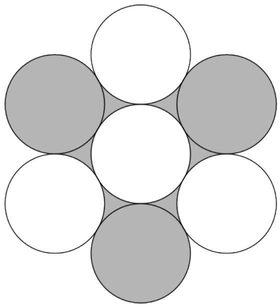
   Risinājums 3:
   a - arbūza kopējā masa
   b - arbūza sausnes masa
   z - zaudētā ūdens masa

   $$\frac{b}{a} = 1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$$
   $$\frac{b}{a-z} = \frac{2}{100}$$

   Tas nozīmē, ka

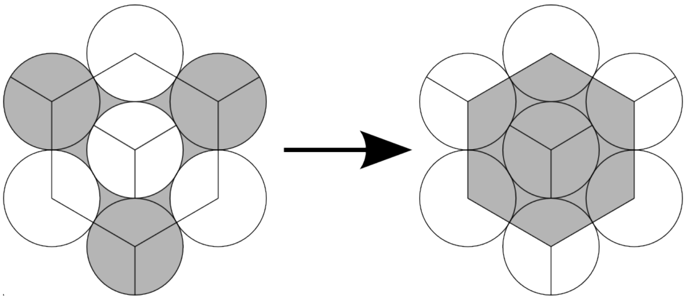
   $$\frac{a-z}{a} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a-z}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{z}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{z}{a} = \frac{1}{2}$$

2. Dotas septiņas vienādas riņķa līnijas ar rādiusu 1 cm, kas pieskaras viena otrai kā parādīts 1. zīmējumā. Aprēķināt iekrāsotās daļas laukumu.



1. zīm.

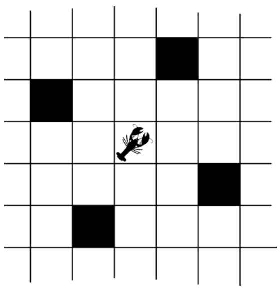
Risinājums:



2. zīm.

Sagriežam dotās figūras riņķa līnijas trešdaļās un pārvietojam tās, kā parādīts 2. zīmējumā, iegūstot regulā-ru sešstūri ar malas garumu 2 cm. Tālāk, ievērosim, ka regulārs sešstūris sastāv no sešiem regulāriem trij-stūriem ar malas garumu 2 cm. Tālāk, izmantojam regulāra trijstūra laukuma formulu $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ cm^2. Tātad sešstūra laukums ir $6\sqrt{3}$ cm^2 un līdz ar to arī sākotnējās iekrāsotās daļas laukums ir $6\sqrt{3}$ cm^2.

3. Ingus un Jānis pamīšus novieto jauna veida šaha figūras - "vēzīšus" - uz $n \times n$ rūtiņu šaha galdiņa. 3. zīmējumā iekrāsoti lauciņi, kurus apdraud vēzītis.



3. zīm.

Katrā gājienā spēlētājs novieto vienu vēzīti tā, lai tas neapdraudētu nevienu citu jau novietotu vēzīti. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar veikt gājienu. (Vēžīši spēles gaitā nepārvietojas.)

Kādiem n vienmēr uzvarēs Ingus, un kādiem - Jānis, ja Ingus sāk?

Risinājums:
Ievērosim, ka neviens vēzītis nevar apdraudēt sev "centrāli simetrisko" vēzīti. Tas ir, ja mēs atrodam galdiņa centru, tad, ja vēzītis apdraudētu kādu lauciņu, kas ir centrāli simetrisks, tad mēs iegūtu, ka centrs atrodas pa vidu kādai rūtiņas malai, bet tas nav iespējams, jo, ja galdiņš ir kvadrāts tad centrs atrodas vai nu uz rūtiņas stūra vai pa vidu rūtiņai.

Līdz ar to, ja n - pāra, tad centrs atrodas uz stūra. Ievērosim, ka otrais spēlētais var spoguļot pirmā spēlētāja gājienus pret galdiņa centru. Tā kā pirmā spēlētāja vēzītis nekad nevarēs apdraudēt sev centrāli simetrisko, tad otrajam spēlētājam vienmēr būs gājiens, ko atbildēt pirmajam. Tā kā pirmajam kaut kad beigsies gājieni, tad viņš noteikti zaudēs. Līdz ar to pāra n uzvar otrais spēlētājs.

Ja n ir nepāra, tad centrs ir rūtiņai pa vidu, un ievērosim, ka pirmais spēlētājs var ielikt vēzīti galdiņa centrā un turpmāk spoguļot otrā spēlētāja gājienus attiecībā pret centru. Līdzīgi kā iepriekš, iegūstam, ka pirmais spēlētājs vienmēr uzvar nepāra n.

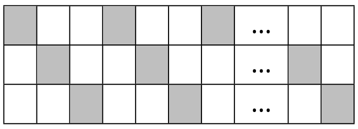
4. Jānim ir 99 flīzes, ar kurām viņš vēlas noklāt vannas istabas sienu. Kāds ir mazākais skaits flīžu, kādu viņam ir jānokrāso, obligāti jānokrāso vismaz viena flīze, lai būtu iespējams ar flīzēm izklāt taisnstūra laukumu tā, lai visās rindās būtu vienāds skaits nokrāsoto flīžu un visās kolonās būtu vienāds nokrāsoto flīžu skaits? Flīžu skaitam rindā un flīžu skaitam kolonnā ne obligāti jāsakrīt. Flīze vienmēr tiek nokrāsota pilnībā, un flīzes nedrīkst pārgriezt. Taisnstūra izmērus Jānis izvēlas pats, bet taisntūrī ir jābūt izmantotām visām 99 flīzēm.

   Risinājums:
   Apzīmēsim minimālo skaitu ar skaitli n. Ar x apizīmēsim raisnstūra rindu skaitu un ar y kolonnu skaitu. Ievērojam to, ka $x \cdot k_1 = y \cdot k_2$, kur k_1, k_2 ir nokrāsoto flīžu skaits attiecīgi kolonnā un rindā. Ievērojam vēl, ka $n = x \cdot k_1$ un $n = y \cdot k_2$, kur n ir kopējais nokrāsoto flīžu skaits.

   Tātad $n \geq \text{mkd}(x, y)$, kur $\text{mkd}(x, y)$ ir mazākais kopīgais x un y dalāmais, jo x dala n un y dala n. Ievērosim vienādību $\text{mkd}(x, y) = \frac{xy}{\text{lkd}(x,y)}$, kur $\text{lkd}(x, y)$ ir skaitļu x un y lielākais dalītājs. Tātad mums pietiek atrast $\text{lkd}(x, y)$ lielāko iespējamo vērtību lai atrastu n mazāko iespējamo vērtību, jo $x \cdot y = 99$ ir fiksēts.

   $\text{lkd}(x, y)$ lielākā vērtība ir 3 (tas seko no dalījuma pirmreizinātājos $99 = 3^2 \cdot 11$, un to var pierādīt sastādot mazu tabuliņu ar visiem iespējamajiem dalītāju pāriem). Tātad $n \geq \frac{99}{3} = 33$.

   Par laimi eksistē tieši konstrukcija šim gadījumam. Paņemam $x = 33$; un $y = 3$. Tad aizpildam visu taisnstūri kā parādīts zemāk:



5. Par *maizīgu* sauksim reālu pozitīvu skaitļu kopu ar ne mazāk kā diviem elementiem, kurai izpildās nosacījums:

   Ja kopai pieder skaitļi a un b, kur $a < b$, tad kopai pieder arī skaitlis $\frac{a}{b} + 1$. Piemēram, visu reālo pozitīvo skaitļu, kas mazāki par 2, kopa ir maizīga, turklāt šī kopa ir arī bezgalīga, jo satur bezgalīgi daudz skaitļu.

   a) Atrast vismaz vienu galīgu (satur galīgu skaitu skaitļu) maizīgu kopu.
   b) Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz galīgu maizīgu kopu.

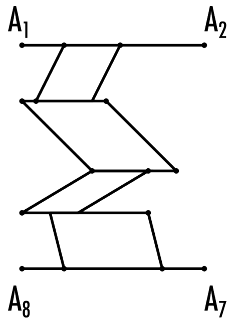
   Risinājums:

   a) Der, piemēram, kopa $\{1.5; 3\}$, jo ir tikai viens pāris $a < b$, $a = 1.5$ un $b = 2$, un no šī pāra izriet, ka kopai ir jāpieder elementam $\frac{1.5}{3} + 1 = 0.5 + 1 = 1.5$, kas tai jau pieder, Tātad kopa ir maizīga.
   b) Ievērosim, ka jebkuram $1 < a < 2$ izpildās $a < \frac{a}{a-1}$, līdz ar to kopa $\{a; \frac{a}{a-1}\}$ ir maizīga, jo $\frac{a}{\frac{a}{a-1}} + 1 = a - 1 + 1 = a$, kas jau pieder kopai.

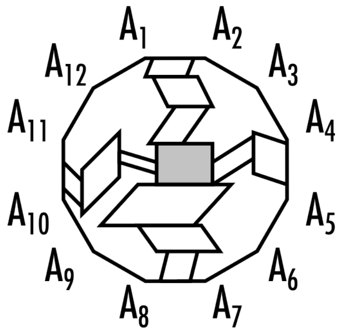
6. Dots regulārs $4k$ stūris (k ir naturāls skaitlis), kas sadalīts paralelogramos. Pierādīt, ka ne mazāk kā k paralelogrami šajā dalījumā ir taisnstūri.

   Risinājums:
   Ievērosim, ka regulāram $4k$-stūrim ir $2k$ pāri paralēlu malu. Turklāt, katram no $2k$ paralēlo malu pāriem atbilst viens perpendikulāru malu pāris. Tātad ir k pa pāriem perpendikulāru un pa pāriem paralēlu četru malu komplektu.

Par “paralelogramu ķēdi” sauksim nepārtrauktu paralelogramu virkni, kas savieno divas pretējas paralēlas malas, kā tas parādīts 4. zīmējumā. Katrām divām paralēlām malām eksistē nepārtraukta paralelogramu ķēde, jo uz katras $4k$-stūra malas balstās vismaz viens paralelograms, savukārt šim paralelogramam ir mala, kas ir paralēla $4k$-stūra malai, un uz paralelogramam malas balstās vēl viens un tā tālāk, līdz mēs sasniedzam pretējo $4k$-stūra malu.



4. zīm.



5. zīm.

Ievērosim, ka, ja mēs apskatam paralelogramu ķēdi, kas atbilst perpendikulārajam malu pārim, tad noteikti ir viens paralelograms, kas pieder abām paralelogramu ķēdēm, kā parādīts 5. zīmējumā. Ievērosim, ka kopējais paralelograms noteikti ir taisnstūris, jo tā malas ir paralēlas perpendikulārām $4k$-stūra malām.

Tā kā ir k pa pāriem perpendikulāru un pa pāriem paralēlu četru malu komplektu, tad ir arī vismaz k taisnstūru, kas bija jāpierāda.

7. Kāds ir garākais iespējamais derīgas bums ķēdes garums, kādu var iegūt, spēlējot spēli **Bums** (skatīt spēles noteikumus pielikumā)?

Risinājums:

Eksistē bums ķēde garumā 4, piemēram: Āro: 10 (cipariski salikts) Karels: **bums!** (jo 11 ir pirmskaitlis) Mērija: **bums!** (jo $1 + 2 = 3$ ir pirmskaitlis) A: **bums!** (jo 13 ir pirmskaitlis) K: **bums!** (jo $1 + 4 = 5$ ir pirmskaitlis) M: 15 (cipariski salikts) Kā redzams, četras reizes pēc kārtas tika pateikt **bums!**.

No otras puses, mēģināsim pierādīt, ka nav iespējams pateikt **bums!** piecas reizes pēc kārtas (un līdz ar to arī vairāk kā piecas reizes pēc kārtas), ja neviens nekļūdās.

Vispirms ievērosim, ka starp pirmajiem desmit skaitļiem noteikti nav prasītās virknes, līdz ar to turpmāk izteiktie spriedumi attieksies tikai uz skaitļiem ar diviem vai vairāk cipariem.

Ja skaitlis dalās ar 3, tad tas nav cipariski salikts tikai gadījumā ja tā ciparu summa ir 3 (pirmskaitlis 3 netiek apskatīts pēc iepriekš apspriestā). 3 var izteikt kā ciparu summu tikai divos veidos $1+1+1$ vai $1+2$. Līdz ar to iegūstam, ka skaitlis vai nu satur 3 vieniniekus un pārējās nulles, vai nu vieninieku, divnieku un pārējās nulles. Līdz ar to tas beidzas ar $0, 1$ vai 2.

Katrā **bums!** ķēdē garumā vismaz 5 noteikti tiks iekļauts vismaz viens skaitlis, kas dalās ar 3. Sauksim šo skaitli par a. Ievērosim, ka a beidzas ar $0, 1, 2$, līdz ar to $a+3$ beidzas ar $3, 4, 5$ un $a-3$ ar $7, 8, 9$. Ievērosim, ka gan $a+3$ gan $a-3$ arī dalās ar 3, bet neviens no tiem nebeidzas ar $0, 1, 2$, tātad gan $a+3$, gan $a-3$ is cipariski salikti.

tas nozīmē, ka, ja eksistē **bums!** ķēde garumā 5, tad tā noteikti satur skaitļus $a-2, a-1, a, a+1, a+2$.

Ja a beidzas ar 2, tad $a-2$ ir pāra, jo beidzas ar 0, un tā ciparu summa ir 1, tātad tas ir cipariski salikts, un a nevar beigties ar 2.

Ja a beidzas ar 1, tad $a+1$ ir pāra un tā ciparu summa ir 4, līdz ar to tas ir cipariski salikts, un a nevar beigties ar 1.

Ja a beidzas ar 0, tad apskatam $a+1$ atlikumu dalot ar 11, tā kā a satur vai nu trīs vieniniekus un pārējās nulles, vai nu vienu vieninieku un vienu divnieku, un a beidzas ar 0, tad $a+1$ satur četrus vieniniekus un pārējās nulles vai vienud divnieku, divus vieniniekus un pārējās nulles, turklāt iens vieninieks ir pirmais cipars. No tā varam secināt, ka $a+1$ dalot ar 11 dod atlikumu $0, 2$ vai 4.

Ja $a+1$ dod atlikumu 0, tad $a+1$ ir cipariski salikts, jo $a+1$ dalās ar 11un tamdēļ nav pirmskaitlis, un tā ciparu summa ir 4, kas nav pirmskaitlis.

Ja $a+1$ dod atlikumu 2 dalot ar 11, tad $a-1$ nevar būt pirmskaitlis, jo tas dalās ar 11. $a-2$ ir pāra, tādēļ arī tas nevar būt pirmskaitlis. No otras puses, $a-2$ ciparu summa ir par 1 mazāka, kā $a-1$ ciparu summa, jo $a-1$ beidzas ar 9, tātad vai nu $a-1$ vai $a-2$ ciparu summa ir salikts skaitlis (jo viena ir pāra un otra nepāra, un abas ir vismaz 8) līdz ar to, vismaz viens no $a-1$ vai $a-2$ ir cipariski salikts, pretruna.

Diemžēl, gadījumā, ja $a+1$ dod atlikumu 4 dalot ar 11, tad pārliecinošs iemesls, kāpēc nevarētu eksistēt šada veida bums ķēde uzdevuma autoram nav zināms.

Tomēr doto pierādījumu viegli var modificēt, lai pierādītu, ka neeksistē **bums!** ķēde garumā 6. Līdz ar to garākās **bums!** ķēdes garums ir starp 4 un 5, un pagaidām, vai nevar eksistēt **bums!** ķēde garumā 5, ir atvērts jautājums.

8. $\triangle ABC$ ievilktās riņķa līnijas centru apzīmēsim ar R. Pagarinot trijstūra ABC malas BC un AC, iespējams uzkonstruēt riņķa līniju, kas ārēji pieskaras malai AB un pārējo malu pagarinājumiem. Sauksim šīs riņķa līnijas centru par P. Pierādīt, ka PR viduspunkts pieder trijstūra ABC apvilktajai riņķa līnijai.

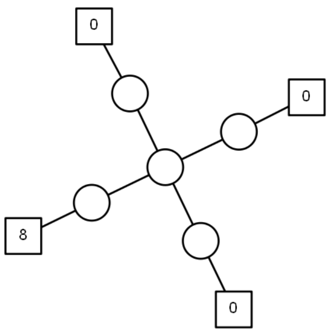
   Risinājums:
   Apzīmēsim PR visudspunktu ar Q. Ievērosim, ka AR ir leņķa $\angle CAB$ bisektrise, jo ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas bisektrišu krustpunktā, līdzīgi BR ir leņķa $\angle CBA$ bisektrise.

   Apzīmēsim malas AC un ārējās riņķa līnijas pieskaršanās punktu ar X un BC pieskaršanās punktu ar Y, un AB pieskaršanās punktu ar Z. Skaidrs, ka $PZ = PX$ kā rādiusi, AP ir kopēja mala, un, tā kā $\angle PZA = \angle PXA = 90°$, tad pēc taisnleņķa trijstūru vienādības pazīmēm iegūstam, ka $\Delta PZA = \Delta PXA$, līdz ar to $\angle PAB = \angle PAX$, un iegūstam, ka AP is $\angle BAX$ bisektrise. Līdzīgi iegūstam, ka BP is leņķa $\angle ABY$ bisektrise.

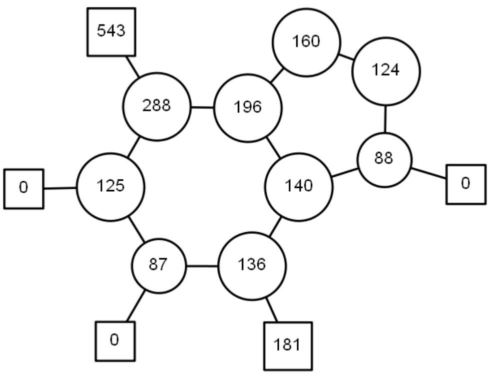
   Tātad $\angle RAP = \frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle BAX = \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle BAX) = 90°$. Līdzīgi, $\angle RBP = 90°$. Bet no tā seko, ka R, A, P, B atrodas uz vienas riņķa līnijas (pretējo leņķu summa ir $180°$), ar centru punktā Q, jo taisnais leņķis $\angle RAP$ vienmēr atrodas pret diametru, līdz ar to RP ir riņķa diametrs un tā viduspunkts Q ir riņķa līnijas centrs.

   Ievērosim, ka $\angle BRA = 180 - \angle RBA - \angle RAB = 180 - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC) = 180 - \frac{1}{2}(180 - \angle BCA) = 90 + \frac{1}{2}\angle BCA$. Savukārt no tā seko, ka $\angle BPA = \angle 180 - \angle BRA = 90 - \frac{1}{2}\angle BCA$, jo ap četrstūri $RAPB$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā centra leņķis $\angle BQP$ balstās uz to loka BRA un leņķis BPA arī balstās uz loka BRA, tad $\angle BQA = 2 \cdot \angle BPA = 180 - \angle BCA$. Bet tad $\angle BQA + \angle BCA = 180°$, kas nozīmē, ka puntki A, B, C, Q atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.

9. a) Katrā no 6. zīmējumā esošajiem tukšajiem lauciņiem ierakstiet skaitli tā, lai katrā aplītī ierakstītais skaitlis būtu visu blakusesošo lauciņu vidējais aritmētiskais. Lauciņus sauc par blakusesošiem, ja tie ir savienoti ar taisnu līniju zīmējumā.



6. zīm.



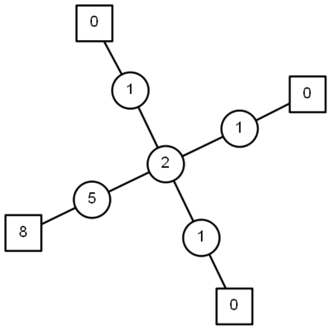
7. zīm.

Piemēram, var pārbaudīt, ka 7. zīmējumā dotie skaitļi apmierina prasību, ka katrā aplītī ierakstītais skaitlis ir visu blakusesošo lauciņu vidējais aritmētiskais.

b) Vai eksistē vēl kāda skaitļu kombinācija, kuru var ierakstīt 7. zīmējuma aplīšos tā, lai tiktu ievērots vidējā aritmētiskā nosacījums? Kvadrātiņos ierakstītos skaitļus mainīt nedrīkst.

Risinājums:

a) Veigli pārbaudīt, ka 8. zīmējumā attēlotie skaitļi apmierina uzdevuma prasības.



8. zīm.

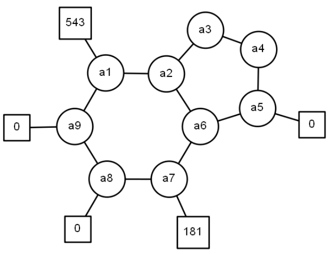
Prasītos skaitļus viegli var iegūt, ja apzīmē centrālajā aplītī ierakstīto skaitli ar x, un ievēro, ka apkārt tam izvietojušies $\frac{x+8}{2}, \frac{x+0}{2}, \frac{x+0}{2}, \frac{x+0}{2}$, kas nozīmē, ka

$$x = \frac{\frac{x+8}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{4} \Rightarrow x = \frac{4x+8}{8} \Rightarrow x = 2$$

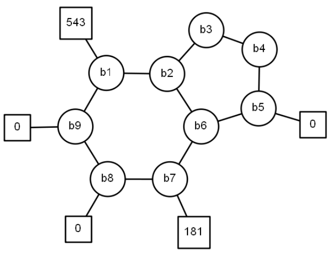
Kad iegūts centrālai skaitlis, iegūt pārējos kļūst ļoti vienkārši.

b) Pierādīsim, ka jebkurā režģī, kurā izpildās vidējā aritmētiskā nosacījums, visielākā un vismazākā vērtība ir ierakstīta kādā no kvadrātiņiem. Lai to pierādītu, ievērosim, ka katrs aplītis ir vidējais aritmētiskais no tam blakusesošajiem lauciņiem, līdz ar to tas ir ne lielāks, kā tam blakusesošie lauciņi, no kā seko prasītais.

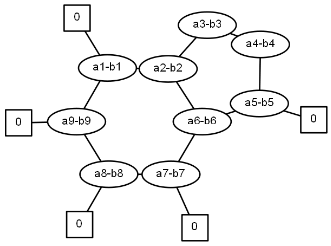
Tagad, pieņemsim, ka eksistē divi dažādi režģa aizpildījumi: $a_1, a_2 \ldots a_9$ un $b_1, b_2 \ldots b_9$ (9. un 10. zīmejumi), tad ievērosim, ka, ja no viena režģa "atņemt" otru (skatīt 11. zīmējumu), tad rezultātā iegūstam derīgu režģi, kuram visos kvadrātiņos ierakstītas nulles.



9. zīm.



10. zīm.



11. zīm.

Bet no tā seko, ka vislielākā un vismazākā vērtība ir 0, bet tad arī visas pa vidu ierakstītās vērtības ir 0, līdz ar to $a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \ldots a_9 - b_9 = 0$, kas nozīmē, ka $a_1 = b_1 \ldots a_9 - b_9$, līdz ar to abi sākotnējie režģi ir vienādi. Tātad eksistē tieši viens veids, kā aizpildīt režģi, tā, lai tiktu ievērots vidējā nosacījums.

10. Veikalā pārdod četru veidu augļus: ābolus, banānus, citronus un mandarīnus. Cik veidos var nopirkt tieši četrus augļus (ne obligāti dažādus)?

Risinājums 1.:
Apzīmēsim ar a ābolu skaitu pirkumā, ar b banānu skaitu pirkumā, ar c citronu skaitu pirkumā, ar m - mandarīnu skaitu pirkumā. Ievērosim, ka dažādiem pirkumiem atšķirsies attiecīgo augļu skaits, līdz ar to, katru pirkumu iespējams viennozīmīgi apzīmēt ar četru skaitļu komplektu (a, b, c, m).

Ievērosim, ka $a + b + c + m = 4$, jo beigās mēs nopērkam tieši 4 augļus, un $a, b, c, m \geq 0$, jo nevar nopirkt negatīvu skaitu augļu, bet ir iespējams kādu nenopirkt.

Pieņemsim, ka katrs auglis maksā 1 zelta monētiņu. Kopā mēs iztērēsim 4 monētiņas, bet lai būtu viltīgāk, novietosim 8 monētiņas rindiņā. Ievērosim, ak starp 8 monētiņām ir 7 atstarpes. Izvēlēsimies trīs atstarpes (to var izdatīt $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ veidos, jo pirmā būs viens no septiņām, otrā viena no sešām, trešā viena no piecām, bet tad sanāk, ka mēs katru atstarpīti ieskaitam par daudz, jo mēs skaitam dažādas secības, kādās var izvēlēties atstarpīti, tāpēc mēs izdalam ar dažādo trīs atstarpīšu sajaukumu skaitu, kas ir $1 \cdot 2 \cdot 3$) un ievietojam tajās pa stienītim.

Stienīši sadala dotās monētiņas četrās grupās. No katras grupas izņemsim vienu monētiņu. Tagad mums ir četras grupiņas, katrā no tām ir 0 vai vairāk monētiņu, un kopā ir 4 monētiņas. Par pirmās kaudzītes monētiņām nopērkam ābolus, par otrās banānus un tā tālāk. Tā kā ir $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ veidi, kā izvēlēties atstarpītes, tad ir arī 35 dažādi pirkumi.

Risinājums 2.:
Vienkārši šķirojam gadījumus: Ja visi augļi ir vienādi, tad ir 4 iespējas (*aaaa*, *bbbb*, *cccc*, *mmmm*)

Ja viens auglis atšķiras, bet pārējie ir vienādi, tad ir $4 \cdot 3 = 12$ iespējas (izvēlamies vienu, kat atšķirsies kā vienu no 4 augļiem un trīs, kas neatšķirsies, no atlikušajiem 3), piemēram *abbb*, *baaa*, *mccc*.

Ja ir divi pāri vienādu augļu, piemēram *aabb*, tad ir $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ pirkumi, jo pirmo pār izvēlas no 4, otro no 3 atliušajiem augļiem, bet ir jāizdala ar 2, jo mēs ieskaitam pārus, kas ir apmainīti vietām divreiz.

Ja divi ir atšķirīgi un divi vienādi, piemēram *abcc*, tad ir $4 \cdot 3 = 12$ veidi - izvēlamies vienu no 4 augļiem, kas nebūs šajā pirkumā un tad vienu no 3 atlikušajiem, ko nopirksim divreiz.

Ja visi ir atšķirīgi, tad ir 1 veids *abcm*.

Tātad kopā ir $4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 35$ pirkumi.

11. Atrast visus tādus naturālus skaitļus $n \geq 3$, ka $n^4 - 5$ dalās ar $n^2 - 5$.

    Risinājums:
    Ievērosim, ka $n^2 - 5$ dala $n^4 - 25 = (n^2 - 5)(n^2 + 5)$. Tas nozīmē, ka ja $n^2 - 5$ dala arī $n^4 - 5$, tad arī šo skaitļu starpība $n^4 - 5 - (n^4 - 25) = 20$ dalās ar $n^2 - 5$. Tā kā 20 ir tikai 6 pozitīvi dalītāji: $1, 2, 4, 5, 10, 20$, kas arī ir iespējamās $n^2 - 5$ vērtības (negatīvi dalītāji nav jāapskata, jo ja $n \geq 3$, tad $n^2 - 5 \geq 0$) Tikai 4 un 20 dod naturālas n vērtības, tātad $n = 3$ vai $n = 5$.

12. Pierādīt, ka trijstūrī pret garāko malu atrodas a) īsākais augstums; b) īsākā mediāna!

    Risinājums:

    a) Ievērosim, ka trijstūra laukums izsakās kā $S = \frac{1}{2} a \cdot h$. Līdz ar to varam izteikt $h = \frac{2S}{a}$. Tā kā S ir nemainīgs lielums jebkuram trijstūrim, tad vismazāko vērtību augstums h sasniedz tad, kad a ir vislielākais (dalot ar lielāku skaitli iegūstam mazāku skaitli). Tātad visīsākais augstums tiešām atrodas pret garāko malu.

    b) Trijstūrī ABC novilksim visas trīs mediānas AP, BQ, QR, to krustpunktu apzīmēsim ar M. Nezaudējot vispārību pieņemsim, ka CB ir garākā mala.

       Nav grūti pierādīt, ka mediānas dala trijstūri sešos vienlielos (ar vienādu laukumu) trijstūros.

       No P novilksim augstumu PS pret malu MB, un no R novilksim augstumu RT pret malu MB. Tā kā trijstūru MPB un MRB laukumi ir vienādi, tad, tā kā pamats MB ir kopējs, tad augstumi sakrīt $PS = RT$. Pielietojot Pitagora teorēmu, iegūstam, ka $SB^2 = PB^2 - PS^2 = \frac{1}{4} CB^2 - PS^2$ un $TB^2 = BR^2 - RT^2 = \frac{1}{4} AB^2 - PS^2$, un, tā kā $BC \geq AB$ pēc pieņēmuma, tad $SB^2 = \frac{1}{4} CB^2 - PS^2 \geq \frac{1}{4} AB^2 - PS^2 = TB^2$, līdz ar to $SB \geq TB$. No tā seko, ka $SM = MB - SB \leq MB - TB = MT$, savukārt no tā seko, ka $MP^2 = SM^2 + SP^2 \leq TM^2 + SP^2 = TM^2 + TR^2 = MR^2$. Līdz ar to $MP \leq MR$. Līdzīgi, apskatot $MPQC$, pierādam, ka $MP \leq MQ$.

Novilksim agstumu AU pret malu MR un agstumu BV pret MR. Līdzīgi kā iepriekš, iegūstam, ka $AU = BV$ kā augstumi, kas balstā uz vienu un to pašu pamatu vienlielos trijstūros. Ievērosim, ka, tā kā $AC \leq CB$ pēc pieņēmuma, tad $CU^2 = CA^2 - AU^2 \leq CB^2 - AU^2 = CB^2 - BV^2 = CV^2$. Līdz ar to $CU \leq CV$, tātad arī $MU = CU - CM \leq CV - CM = MV$, tādēļ $MA^2 = MU^2 + AU^2 \leq MV^2 + AU^2 = MV^2 + BV^2 = MB^2$, līdz ar to $MA \leq MB$. Līdzīgi, apskatot AMC, iegūstam, ka $AM \leq CM$.

Apvienojot $MP \leq MR$ un $AM \leq MC$, iegūstam, ka $AP = AM + MP \leq CM + MR = CR$. Līdzīgi iegūstam, ka $AP \leq BQ$. Tātad AP ir īsākā mediāna, un patiesi tā atrodas pret garāko malu CB, kas bija jāpierāda.

13. Dots polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem. Zināms, ka vienādojuma $P(P(x)) = x$ vienīgie atrisinājumi veselos skaitļos ir $x = 0$ un $x = 1$. Atrast visas iespējamās $P(1)$ vērtības!

Risinājums:
Ievērosim, ka ja vienādojumam $P(x) = x$ ir atrisinājums x, tad tas ir atrisinājums arī vienādojumam $P(P(x)) = x$, jo tādā gadījumā $P(P(x)) = P(x) = x$. Līdz ar to vienādojumam $P(x) = x$ var būt ne vairāk kā divi atrisinājumi (ja to būtu vairāk, tad $P(P(x)) = x$ būtu vairak par diviem atrisinājumiem).

Papildu, ja x ir vienādojuma $P(P(x)) = x$ atrisinājums, un $P(x) \neq x$, tad no tā, ka $P(P(P(x))) = P(x)$, seko, ka $P(x)$ arī ir vienādojuma atrisinājums, tātad kopā ir divi dažādi atrisinājumi x un $P(x)$. Tādēļ var būt ne vairāk kā viena tāda x vērtība, ka $P(P(x)) = x$ un $P(x) \neq x$. Ja $x = 1$ ir šī vērtība, tad $P(1) = 0$, jo vienīgās $P(P(x)) = x$ saknes ir 0 un 1. Pretējā gadījumā, ja $x = 1$ nav šī vērtība, tad $P(1) = 1$.

Tātad vienīgie iespējamie atrisinājumi ir $P(1) = 0$ un $P(1) = 1$.

Ar to vēl nepietiek, ir jāatrod derīgi polinomi! Polinoms, kuram izpildās uzdevuma nosacījumi un $P(1) = 1$ ir $P(x) = x^2$, jo $P(P(x)) = x^4$ un $x^4 = x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0$ ir dieši divi atrisinājumi 0 un 1.

Polinoms, kuram izpildās uzdevuma nosacījumi un $P(1) = 0$ ir $P(x) = (x-1)^2$, jo

$$P(P(x)) = ((x-1)^2 - 1)^2 = (x-1)^4 - 2(x-1)^2 + 1$$

un vienādojums

$$(x-1)^4 - 2(x-1)^2 + 1 - x = 0$$

pārrakstās kā

$$(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - (x-1) = 0$$

Jeb

$$(x-1)((x-1)^3 - 2(x-1) - 1) = 0$$
$$(x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2x + 2 - 1) = 0$$
$$(x-1)(x^3 - 3x^2 + x) = 0$$
$$x(x-1)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

Viegli pārbaudīt, ka $x^2 - 3x + 1$ nav veselu sakņu, līdz ar to $P(x) = (x-1)^2$ apmierina nosacījumus.

14. Saskaitīšanas ķēde ir n skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kurā $a_1 = 1$ un jebkuram citam virknes loceklim a_i eksistē divi tādi virknes locekļi a_j un a_k (iespējams vienādi), ka $j \leq k < i$ un $a_i = a_j + a_k$.

Piemēram, $(1, 2, 3, 5, 7, 10)$ ir saskaitīšanas ķēde, jo $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $5 = 2 + 3$, $7 = 2 + 5$, $10 = 3 + 7$. $(1, 2, 3, 5, 10)$ ir cita saskaitīšanas kēde, kuras pēdējais loceklis arī ir 10, turklāt tā ir īsāka.

Dots skaitlis $k < 2^t$, pierādiet, ka eksistē tāda saskaitīšanas ķēde $a_1, a_2, \ldots a_n$, ka $a_n = k$ un $n \leq 2 \cdot t$.

Risinājums:
Izmantosim indukciju lai pierādītu, ka visiem pāra skaitļiem $n < 2^t$ eksistē virkne, kuras garums nepārsniedz $2t - 1$, un visiem nepāra skaitļiem $n < 2^t$ eksistē virkne, kuras garums nepārsniedz $2t$.

Indukcijas Bāze: Ievērosim, ka (1) ir derīga virkne, kas beidzas ar 1, un tajā ir $1 < 2 \cdot 1$ skaitļi.
Induktīvais pieņēmums: Pieņemsim, ka visiem naturāliem $k < n$ izpildās prasītais.
Induktīvā Pāreja:

1) Ja n - pāra, teiksim $n = 2m < 2^t$, tad ievērosim, ka no induktīvā pieņēmuma seko, ka priekš m eksistē derīga skaitīšanas virkne $(a_1, a_2 \dots m)$ kuras garums nepārsniedz $2(t-1)$ (jo $m = \frac{n}{2} < n$ un $m = \frac{n}{2} < 2^(t-1))$. Bet tad virkne, kuru mēs iegūstam pievienotjot iepriekšējai skaitīšanas ķēdei $2m$, proti $(a_1, a_2 \dots m, 2m)$, ir derīga skaitīšanas ķēde, kas beidzas ar $2m = n$, jo $2m = m + m$, un virknes garums nepārsniedz $2 \cdot (t-1) + 1 = 2 * t - 1$.

2) Ja n - nepāra, $n = 2m + 1 < 2^t$, tad ievērosim, ka $n - 1 = 2m < 2^t$ ir pāra, līdz ar to eksistē skaitīšanas ķēde, kas beidzas ar $2m$, proti $(a_1, a_2 \dots 2m)$, kuras garums nepārsniedz $2t - 1$ izmantojot induktīvo pieņēmumu. Bet tad mēs varam šo skaitīšanas ķēdi pagarināt ar $2m + 1$, iegūstot derīgu ķēdi $(a_1, a_2 \dots 2m, 2m + 1)$, jo $2m + 1 = 2m + a_1$, un tās garums nepārsniedz $2t - 1 + 1 = 2t$.

Tas pabeidz indukciju un arī pierādījumu.

15. Uz trijstūra ABC malas AB atlikts punkts D, un uz malas BC atlikts punkts E tā, ka DE paralēls AC. Taišņu CD un AE krustpunktu apzīmēsim ar T.

Pierādīt, ka taisne BT dala nogriežņus DE un AC uz pusēm (iet cauri viduspunktiem).

Risinājums:

BT un DE krustpunktu apzīmēsim ar X, BT un AB krustpunktu ar Y. Ievērosim, ka $S_{ADC} = S_{AEC}$, jo abiem trijstūriem sakrīt augstums, tā kā $DE||AC$, un tiem ir kopējs pamats AC. Līdz ar to arī $S_{ATD} = S_{CTE}$, jo $S_{ATD} + S_{ATC} = S_{ADC} = S_{AEC} = S_{CTE} + S_{ATC}$.

Ievērosim, ka $\frac{S_{ATD}}{S_{DTB}} = \frac{AD}{DB}$, jo abiem trijstūriem sakrīt augstums. Līdzīgi $\frac{S_{CTE}}{S_{ETB}} = \frac{CE}{EB}$.

Tā kā $\triangle DBE\ \triangle ABC$, tad $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE}$, bet tad arī $\frac{AD}{DB} = \frac{AB}{DB} - 1 = \frac{BC}{BE} - 1 = \frac{CE}{BE}$.

Tas nozīmē, ka $\frac{S_{ATD}}{S_{DTB}} = \frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB} = \frac{S_{CTE}}{S_{ETB}}$, bet tā kā $S_{ATD} = S_{CTE}$, tad arī $S_{DTB} = S_{ETB}$, līdz ar to $S_{ATB} = S_{CTB}$.

Visbeidzot, $\frac{S_{ATB}}{S_{CTB}} = \frac{AY}{YC}$, jo abiem trijstūriem ir kopējs pamats BT, un dēļ līdzības, abu trijstūru augstumi attiecas tā pat kā malas AY un YC.

Bet tas nozīmē, ka $AY = YC$, kas bija jāpierāda. Vienādība $DX = XE$ seko no trijstūru BDX un BAY līdzības un trijstūru BEX un BCY līdzības.

Pielikums

Spēles **Bums** apraksts:

Sauksim skaitli par *cipariski saliktu*, ja tas nav pirmskaitlis un tā ciparu summa nav pirmskaitlis.

(Pirmskaitlis ir skaitlis, kas dalās tieši ar diviem skaitļiem: ar sevi un ar 1. Piemēram, $5, 13, 29$ ir pirmskaitļi, bet, piemēram, $4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4, 20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 10, 111 = 3 \cdot 37 = 1 \cdot 111$ nav. Skaitlis 1 **nav** pirmskaitlis, jo dalās tikai ar vienu skaitli, nevis diviem)

Sastājies aplī ar $3 - 7$ draugiem un sagatavojies aizraujošai spēlei!

Spēle sākas, kad kāds nosauc cipariski saliktu skaitli, un gājiens pāriet pie nākošā spēlētāja pulksteņa rādītāja virzienā.

Nosauktais skaitlis kļūst par “spēles skaitli”, un katru gājienu tā vērtība palielinās par 1 (neatkarīgi no tā, ko pateica iepriekšējais spēlētājs).

Gājieni norisinās pa apli, un mērķis ir saprast pēc iespējas ātrāk, vai tagadējais spēles skaitlis ir cipariski salikts, vai nē.

Kad pienāk tava kārta:

a) Ja spēles skaitlis ir cipariski salikts, tad tev tas ir skaļi jānosauc.

b) Ja tas nav cipariski salikts, tad ir jāsaka **bums!**.

c) Ja tu vilcinies par ilgu un nevari izdomāt vai pasaki nepareizi, tad tev ir jāiziet no apļa, un spēle sākas no jauna ar atlikušajiem spēlētājiem.

Par *bums ķēdi* sauksim nepārtrauktu virkni ar **bums!** izsaucieniem no spēlētājiem. Derīga bums ķēde ir tāda, kuras gaitā neviens no spēlējājiem nav kļūdījies ar savu **bums!** izsaucienu. Par bums ķēdes garumu sauksim kopējo **bums!** izsaucienu skaitu ķēdē.

Piemērs spēlei starp trim spēlētājiem: Āro (A), Karelu (K) un Mēriju (M):

1. Āro pasaka 46 (tas ir cipariski salikts),
2. Karels iesaucas **bums!** (jo 47 ir pirmskaitlis),
3. Mērija saka 48 (tas ir cipariski salikts),
4. A: **bums!** (49 ciparu summa ir pirmskaitlis),
5. K: **bums!** (50 ciparu summa ir pirmskaitlis),
6. M: 51 (cipariski salikts),
7. A: **bums!** (52 ciparu summa ir pirmskaitlis)
8. K: **bums!** (53 ir pirmskaitlis)
9. M: 54 (tas ir cipariski salikts)
10. A: 55 (tas ir cipariski salikts)
11. K: 56 (kļūda, 56 ciparu summa ir pirmskaitlis, tādēļ 56 nav cipariski salikts un bija jāsaka **bums!**)
12. Spēle sākas no jauna

    Šajā spēlē garākās derīgās bums ķēdes garums ir 2, un ir divas derīgas bums ķēdes šādā garumā, viena, kad spēles skaitlis ir 49 un 50, otra, kad spēles skaitlis ir 52 un 53.