atvērtā kopa 2017

Komandu olimpiāde matemātikā
Atrisinājumi 7. klasei

1. Arbūza sastāvā ir 99% ūdens, tomēr, kad to atstāja saulē uz stundu, daļa ūdens iztvaikoja, un tagad tikai 98% arbūza ir ūdens. Kādu daļu sākotnējās masas arbūzs ir zaudējis?

   Risinājums 1:
   Pieņemsim, ka arbūza masa ir 100 arbūzēni, saīsināsim kā 100 az (mērvienība ir izdomāta, bet tā, kā mums interesē tikai masu attiecības, tad mērvienības nav tik svarīgas). Tātad sākumā ūdens sver 99 az un sausais atlikums sver 1 az. Pēc izžūšanas, mums ir 98% ūdens, un tātad 2% sausnes. Sausnes masa nav mainījusies, tātad

   $$2\% = 1 \text{ az}$$

   $$98\% = \text{ ūdens pēc saules}$$

   Reizinam šķērsām un iegūstam, ka ūdens pēc saules $= \frac{1 \cdot 98}{2} = 49$ az. Tātad arbūzs tagad sver $49 + 1 = 50$ az, tātad pazaudēja 50 az, kas atbilst 50% no sākotnējās masas.

   Risinājums 2:
   a - arbūza kopējā masa
   u - ūdens masa arbūzā sākumā
   z - zaudētā ūdens masa

   $$\frac{u}{a} = \frac{99}{100} \Leftrightarrow 100u = 99a$$

   $$\frac{u-z}{a-z} = \frac{98}{100} \Leftrightarrow 100u - 100z = 98a - 98z$$

   $$100u - 98a = 2z \Leftrightarrow 99a - 98a = 2z \Leftrightarrow a = 2z \Leftrightarrow 0.5 \cdot a = z$$

   tātad zudumi z ir puse no sākotnējās masas.

   Risinājums 3:
   a - arbūza kopējā masa
   b - arbūza sausnes masa
   z - zaudētā ūdens masa

   $$\frac{b}{a} = 1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$$

   $$\frac{b}{a-z} = \frac{2}{100}$$

   Tas nozīmē, ka

   $$\frac{a-z}{a} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a-z}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{z}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{z}{a} = \frac{1}{2}$$

2. Veikalā pārdod trīs veidu augļus: ābolus, banānus un citronus. Cik veidos var nopirkt tieši trīs augļus?

   Risinājums:
   Ar a apzīmēsim ābolu, ar b - banānu, ar c - citronu. Ar vairāku burtu virkni apzīmēsim pirkumu. Piemēram, aab atbilst pirkumam, kurā ir divi āboli un viens banāns. Ievērosim, ka aab un aba ir viens un tas pats pirkums, jo nav svarīgi, kādā secībā mēs pērkam augļus.

Ievērosim, ka, ja visi nopirktie augļi ir vienādi, tad ir iespējami 3 dažādi veidi, kā iepirkties - *aaa*, *bbb*, *ccc*). Ja visi augļi ir dažādi, tad ir 1 veids - *abc*. Ja divi augļi ir vienādi un viens atšķirās, tad ir 6 veidi, kā tos nopirkt - *aab*, *abb*, *acc*, *baa*, *bcc*, *caa*.

Tātad ir kopā $3+6+1=10$ dažādi veidi, kā nopirkt tieši trīs augļus.

3. Zināms, ka skaitļa a ciparu summa ir 13. Ja skaitli a pareizina ar divi, un apmaina rezultāta ciparus vietām, vai iespējams, ka beigās iegūst skaitli, kas dalās ar 3?

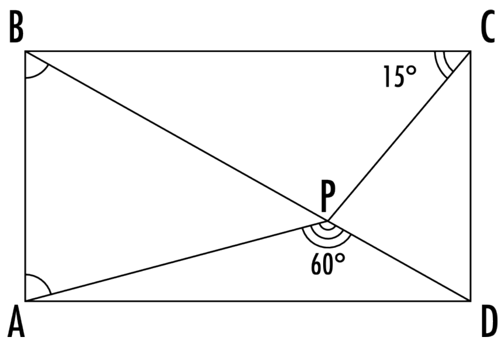
   Piemēram, ja $a=139$, tad pareizinot to ar 2 iegūstam 278 un apmainot tā ciparus vietām varam iegūt, piemēram, 872 vai 782.

   Risinājums:
   Skaitlis dalās ar 3 tad un tikai tad, ja tā ciparu summa dalās ar 3. 13 nedalās ar 3, līdz ar to arī a nedalās ar 3.

   Ievērosim, ka ja skaitlis sākotnēji nedalās ar 3, tad pareizinot skaitli ar 2, tas vēl aizvien nedalās ar 3. Līdz ar to $2a$ arī nedalās ar 3 un tā ciparu summa nedalās ar 3.

   Skaidrs, ka apmainot $2a$ ciparus vietām, ciparu summa nemainās, līdz ar to izpildot prasītās darbības ar a, nevar iegūt skaitli, kas dalītos ar 3.

4. Uz taisnstūra $ABCD$ diagonāles BD atlikts punkts P. Zināms, ka $\angle PAB=\angle PBA$, $\angle PCB=15^\circ$ un $\angle APD=60^\circ$. Noteikt leņķi DPC.



1. zīm.

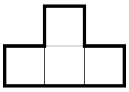
   Risinājums:
   Ievērosim, ka $\angle PCD=\angle BCD-\angle BCP=90-15=75^\circ$. Tā kā B, P un D atrodas uz vienas taisnes, tad $\angle APB=180-\angle APD=180-60=120^\circ$. Trijstūra iekšējo leņķu summa ir 180, tāpēc $\angle ABP+\angle BAP+\angle APB=180$, tā kā $\angle ABP=\angle BAP$ no dotā, tad vienādība pārrakstās kā $2\angle ABP+120=180$, tātad $\angle ABP=30^\circ$. No trijstūra ABD iegūstam, ka $\angle ABD+\angle BDA+\angle DAB=180$, tātad $30+90+\angle BDA=180$ un $\angle BDA=60^\circ$.

   Visbeidzot, no trijstūra DPC iegūstam, ka $\angle DPC=180-\angle PCD-\angle PDC=180-60-15=105^\circ$.

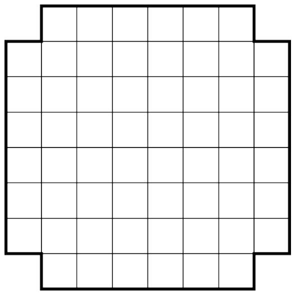
5. Kas ir lielāks $\dfrac{2016}{2017}+\dfrac{2018}{2017}$ vai $\dfrac{2017}{2016}+\dfrac{2017}{2018}$?

   Risinājums:
   Ievērosim, ka $\frac{2016}{2017}<\frac{2017}{2018}$, jo veinādojumu var pārrakstīt kā $2016\cdot 2018<2017^2$, un atsaucot atmiņā kvadrātu starpības formulu $x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$ redzam, ka $2016\cdot 2018=2017^2-1<2017^2$. Līdzīgi pierādam, ka $\frac{2018}{2017}<\frac{2017}{2016}$.
   Bet tad skaidrs, ka arī šo lielumu summām izpildās nevienādība $\frac{2016}{2017}+\frac{2018}{2017}<\frac{2017}{2016}+\frac{2017}{2018}$

6. Uldža atrada bezgalīgi daudz T-tetramino veida figūru (skat. 2. zīmējumu).



2. zīm.



3. zīm.

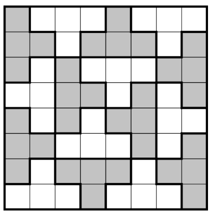
Vai Uldža varēs noklāt ar šīm figūrām tā, lai tās nepārklājas:

a) 8×8 rūtiņu laukumu;

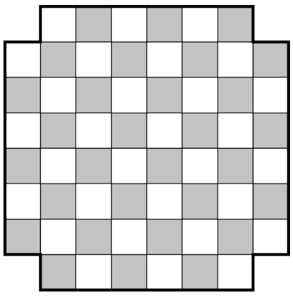
b) 8×8 rūtiņu laukumu, kam izgriezti visi stūrīši, kā parādīts 3. zīmējumā.

Risinājums:

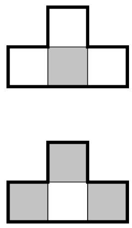
a) Jā, to ir iespējams izdarīt, piemēram, kā parādīts 4. zīmējumā.



4. zīm.



5. zīm.



6. zīm.

b) Nē, to nav iespējams izdarīt, izskaitīsim šaha galdiņa melnās un baltās rūtiņas 5. zīmējumā, ir 30 melnu un 30 baltu, 60 rūtiņas kopā. Tā kā katra T tetromino figūra aizņem 4 rūtiņas, tad mums nepieciešamas $\frac{60}{4} = 15$ figūras.
Ievērosim, ka ja mēs novietojam kādu T tetramino figūru uz šaha galdiņa, tad tā noklās nepāra skaitu melno un nepāra skaitu balto rūtiņu (skatīt 6. zīmējumu).
No otras puses tā kā ir nepāra skaits figūru un katra no tām noklāj nepāra skaitu melno rūtiņu, tad, ja galdiņu varētu aizpildīt, tad tiktu noklāts nepāra skaits melno rūtiņu. Bet kopā ir 30 melno rūtiņu, kas ir pāra skaitlis - pretruna. Tātad prasīto paveikt nav iespējams.

7. Vai iespējams, ka, spēlējot spēli **Bums** (skatīt spēles noteikumus pielikumā), četras reizes pēc kārtas tiks pateikts **bums!**, pieņemot, ka neviens no spēlētājiem nekļūdījās? Citiem vārdiem sakot, vai eksistē bums ķēde garumā 4?

Risinājums:
Jā, piemēram: Āro: 10 (cipariski salikts) Karels: **bums!** (jo 11 ir pirmskaitlis) Mērija: **bums!** (jo $1 + 2 = 3$ ir pirmskaitlis) A: **bums!** (jo 13 ir pirmskaitlis) K: **bums!** (jo $1 + 4 = 5$ ir pirmskaitlis) M: 15 (cipariski salikts) Ir bums ķēde garumā četri. To ir ļoti ērti atrast, ja izspēlē pāris spēles sākot no 1.

8. Rindā novietoti 100 fidget spinneri, neviens nav iegriezts. Labi zināms, ka spineris var atrasties tikai vienā no diviem stāvokļiem: apstādināts vai iegriezts. Kad spineri iegriež, tas turpina griezties bezgalīgi ilgi, kamēr to apstādina.
Jānis noiet garām un, sākot ar pirmo spineri, nomaina katra spineri stāvokli uz tam pretējo. Pēc tam viņš atkal noiet garām un, sākot ar otro spineri, nomaina katra otrā spinera stāvokli. Tā viņš turpina, kamēr

nav izpildījis 100 gājienus, k-tajā gajienā, sākot ar k-to spineri, nomainot katra k-tā spinera stāvokli. Kuri spineri griezīsies pēc tam, kad Jānis būs beidzis savas gaitas?

Risinājums:
Ievērosim, ka katrs spinneris tiks iegriezts tik reižu, cik dažādu dalītāju ir tā kārtas skaitlim. Līdz ar to, griezīsies visi tie spineri, kuriem ir nepāra skaits dalītāju.

Tikai naturālu skaitļu kvadrātiem ir nepāra skaits dalītāju. Lai to pierādītu, ievērosim, ka ja skaitlis a dalās ar d, tad $\frac{a}{d}$ arī ir a dalītājs. Līdz ar to, ja visiem d izpildās, ka $\frac{a}{d} \neq d$, tad visus dalītājus var sadalīt pāros, līdz ar to ir pāra skaits dalītāju.

No otras puses, ja kādam dalītājam d izpildās, ka $\frac{a}{d} = d$, tad $a = d^2$, iegūstam, ka a ir naturāla skaitļa dalītājs.

Līdz ar to griezīsies visi spineri, kuru kārtas skaitlis ir kvadrāts - $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$.

9. Klasē ir 30 skolēni, katrs no viņiem brīvajā laikā nodarbojas ar peldēšanu, hokeju vai futbolu. 7 skolēni brīvajā laikā nodarbojas ar peldēšanu, 15 aizraujas ar hokeju, un 14 spēlē futbolu. 3 brīvajā laikā nodarbojas gan ar futbolu, gan ar hokeju, 2 ar hokeju un peldēšanu, un 5 nodarbojas ar futbolu un peldēšanu.

   Cik skolēni nodarbojas ar visiem trim sporta veidiem?

   Risinājums:
   No uzdevuma nosacījumiem, mēs zinām, ka visi 30 skolēni nodarbojas ar vismaz vienu sporta veidu. Izskaitīsim, cik skolēni nodarbojas ar vismaz vienu sporta veidu, saskaitot kopā skolēnus, kas ndoarbojas ar katru disciplīnu, $7 + 15 + 14 = 36$, bet tas nav pareizi, jo esam ieskaitījuši skolēnus, kas nodarbojas ar diviem sporta veidiem divreiz, vienreiz pie viena sporta veida un vienreiz pie otra. Līdzīgi arī visi skolēni, kas nodarbojas ar trim sporta veidiem tika ieskaitīti trīs reizes.

   Lai to izlabotu, atņemsim no rezultāta tos skolēnus, kas nodarbojas ar diviem sporta veidiem: $36 - 3 - 2 - 5 = 26$. Arī tas nav līdz galam pareizi, jo visi skolēni, kas nodarbojas ar visiem trim sporta veidiem sākumā tika atņemti trīs reizes. Tātad galējā summā pietrūkst to skolēnu, kas nodarbojas ar visiem trim sporta veidiem.

   Tātad ir $30 - 26 = 4$ skolēni, kas nodarbojas ar visiem trim sporta veidiem.

   (Atbilde, diemžēl, ir pretrunīga, jo tikai 2 skolēni nodarbojas gan ar peldēšanu, gan ar futbolu, līdz ar to ne vairāk kā 2 var nodarboties ar peldēšanu, futbolu un hokeju)

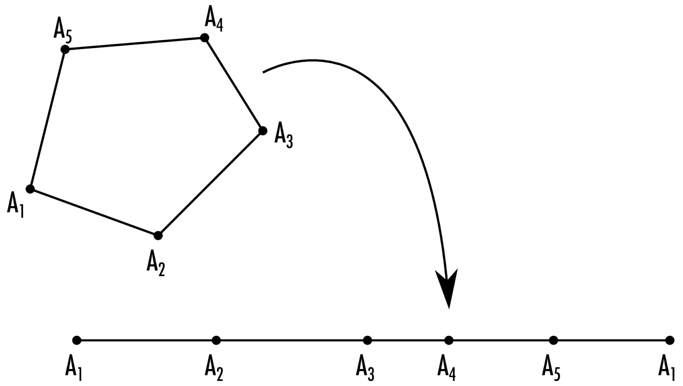
10. Atim ir ļoti daudz zaķu. Viņš izdomāja tos izskaitīt, dažādos veidos sadalot tos pa būrīšiem, būrīšu ir daudz vairāk nekā zaķu. Ja zaķus liek burīšos pa diviem zaķiem katrā, viens zaķis paliek pāri. Ja liek burīšos pa trim, arī viens paliek pāri. Ja liek pa četriem, pieciem vai sešiem, tad visos gadījumos viens paliek pāri. Savukārt, liekot pa septiņiem, nav zaķa, kas paliktu pāri.

    Zināms, ka Atim ir mazākais iespējamais zaķu skaits, kas apmierina nosacījumus. Cik zaķu ir Atim?

    Risinājums:
    Apzīmēsim prasīto skaitli ar n. Tad $n - 1$ dalās gan ar 2, gan ar 3, gan ar 4, gan ar 5, gan ar 6, jo, ja vienu zaķi noņem, tad zaķi tieši saliekās veselā skaitā būrīšu katrā ar attiecīgo skaitu zaķu. Ja skaitlis dalās ar 4, tad tas noteikti dalās arī ar 2. Ja skaitlis dalās gan ar 4 gan ar 3, tad tas noteikti dalās arī ar 6. Līdz ar to pietiek, ka $n - 1$ vienaicīgi dalās ar 3, 4 un 5, līdz ar to tas dalās arī ar $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Pirmie pāris 60 daudzkārtņi ir $60, 120, 180, 240, 300$. Tātad sešas mazākās iespējamās n vērtības ir: $61, 121, 181, 241, 301$. Pārbaudot dalāmību ar 7 (n dalās ar 7 jo zaķus var tieši salikt būrīšos pa septiņiem katrā) iegūstam, ka tikai 301 dalās. Līdz ar to ir 301 zaķis un vienlaikus esam pierādījuši ka tā ir mazākā vērtība.

11. Dots daudzstūris, kura perimetrs ir p. Pierādīt, ka no daudzstūra malām var sastādīt divus nogriežņus tā, ka to starpība nepārsniedz $\frac{p}{3}$. Katrai malai jābūt izmantotai tieši vienu reizi vienā nogrieznī.

    Risinājums:
    Sastādīsim no daudzstūra visām malām vienu nogriezni, kā parādīts 7. zīmējumā.



7. zīm.

Apskatīsim šī nogriežņa viduspunktu. Ja viduspunkts atrodas uz dalījuma vietas - proti, tas sakrīt ar kādu no daudzstūra virsotnēm, tad varam sastādīt divus pilnīgi vienādus nogriežņus, kas atšķiras par $0 \le \frac{p}{3}$, kas bija vajadzīgs.

Ja viduspunkts nesakrīt ar virsotni, tad tas atrodas iekš kādas no malām. Sauksim šo malu par BC, savukārt visu lielo nogriezni apzīmēsim ar AD. Ievērosim, ka ja $AC - CD \le \frac{p}{3}$ vai $BD - AB \le \frac{p}{3}$, tad esam atraduši prasītos nogriežņus un pierādījums ir pabeigts.

Ja tomēr neviens no nosacījumiem neizpildās, tas ir $AC - CD > \frac{p}{3}$ un $BD - AB > \frac{p}{3}$, tad pārrakstīsim abas nevienādības kā $AB + BC - CD > \frac{p}{3}$ un $BC + CD - AB > \frac{p}{3}$, bet tad saskaitot abas nevienādības iegūstam, ka $2BC > \frac{2p}{3} \Rightarrow BC > \frac{p}{3}$. Bet tad, ja mēs kā vienu nogriezņi ņemam BC, un kā otru ņemam nogriežņu AB un CD apvienojumu, tad to startpība nepārsniedz

$$AB + CD - BC = p - 2BC \le p - \frac{2p}{3} = \frac{p}{3}$$

kas arī tika prasīts. (Ievērosim, ka situācija, kurā $AB + CD < BC$ nav iespējama dēļ trijstūra nevienādības).

Tātad jebkurā gadījumā būs iespējams atrast prasītā veida dalījmu divos nogriežņos.

12. Uz tāfeles uzrakstīts daļskaitlis $\frac{a}{b}$. Katrā gājienā drīkst ar daļskaitli veikt vienu no sekojošajām darbībām:

1) Apgriezt to, $\frac{a}{b} \longrightarrow \frac{b}{a}$
2) Pieskaitīt 1 un pēc tam izdalīt ar 2, $\frac{a}{b} \longrightarrow \frac{\frac{a}{b}+1}{2}$

Ja sākumā uzrakstīts $\frac{5}{8}$, vai iespējams atkārtoti pielietojot darbības nonākt līdz a) $\frac{20}{23}$ b) $\frac{433}{471}$?

Risinājums:

a) $\frac{20}{23}$ var iegūt, piemēram, ar sekojošo darbību virkni:

$$\frac{5}{8} \xrightarrow{\text{1) darbība}} \frac{8}{5} \xrightarrow{\text{2) darbība}} \frac{13}{10} \xrightarrow{\text{2) darbība}} \frac{23}{20} \xrightarrow{\text{1) darbība}} \frac{20}{23}$$

b) Apskatīsim starpību starp skaitītāju un saucēju $a - b$.

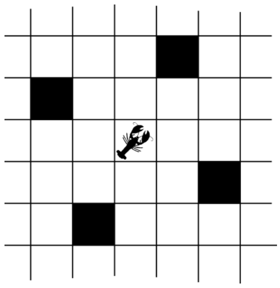
Ievērosim, ka izpildot pirmo darbību, starpība nomaina zīmi $a - b \to b - a$.

Izpildot otro darbību $\frac{a}{b} \to \frac{\frac{a}{b}+1}{2} = \frac{a+b}{2b}$, mēs iegūstam, ka jaunā starpība ir $a + b - 2b = a - b$, proti tā nav mainījusies.

Tātad starpība starp skaitītāju un saucēju ir invariants (nemainās) izpildot iespējamās darbības, izņemot, iespējams, tā noamina zīmi.

Tātad, ja mēs sākam ar $\frac{5}{8}$, tad sākotnējā starpība ir $5 - 8 = -3$, līdz ar to jebkura daļa, kuru var iegūt izmantojot darbības, būs ar saucēja skaitītāja starpību $+3$ vai -3. Bet $\frac{433}{471}$ starpība starp saucēju un skaitītāju ir $433 - 471 = -38$. Tātad $\frac{433}{471}$ nevar iegūt, kas bija jāpierāda.

13. Ingus un Jānis pamīšus novieto jauna veida šaha figūras - “vēzīšus” - uz šaha galdiņa. 8. zīmējumā iekrāsoti lauciņi, kurus apdraud vēzītis.



8. zīm.

Katrā gājienā spēlētājs novieto vienu vēzīti tā, lai tas neapdraudētu nevienu citu jau novietotu vēzīti. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar veikt gājienu. (Vēžīši spēles gaitā nepārvietojas.)

Ja Ingus sāk, vai viņš noteikti var uzvarēt, ja spēle norisinās uz

a) 8×8 rūtiņu šaha galdiņa?

b) 11×11 rūtiņu šaha galdiņa?

Risinājums:
Ievērosim, ka neviens vēzītis nevar apdraudēt sev “centrāli simetrisko” vēzīti. Tas ir, ja mēs atrodam galdiņa centru, tad, ja vēzītis apdraudētu kādu lauciņu, kas ir centrāli simetrisks, tad mēs iegūtu, ka centrs atrodas pa vidu kādai rūtiņas malai, bet tas nav iespējams, jo, ja galdiņš ir kvadrāts tad centrs atrodas vai nu uz rūtiņas stūra vai pa vidu rūtiņai.

a) Ievērosim, ka otrais spēlētais var spoguļot pirmā spēlētāja gājienus pret galdiņa centru. Tā kā pirmā spēlētāja vēzītis nekad nevarēs apdraudēt sev centrāli simetrisko, tad otrajam spēlētājam vienmēr būs gājiens, ko atbildēt pirmajam. Tā kā pirmajam kaut kad beigsies gājieni, tad viņš noteikti zaudēs.

b) Ievērosim, ka pirmais spēlētājs var ielikt vēzīti galdiņa centrā un turpmāk spoguļot otrā spēlētāja gājienus attiecībā pret centru. Tā kā otrā spēlētāja vēzītis nekad nevarēs apdraudēt sev centrāli simetrisko, tad pirmajam spēlētājam vienmēr būs gājiens, ko spoguļot. Tā kā otrajam kaut kad beigsies gājieni, tad viņš noteikti zaudēs.

14. Andža gribēja uzzināt, cik alā ir melnu un cik baltu murkšķu. Alā ir ļoti tumšs, bet Andža ir pārliecināts, ka alā melno murkšķu ir mazāk par $\frac{3}{5}$ visu murkšķu. Pēkšņi alā ieskrien vēl 2 melni murkšķi. Andža atkal kārtīgi izpēta alu un nonāk pie secinājuma, ka tagad alā melno murkšķu ir vairāk nekā $\frac{2}{3}$ visu murkšķu. Cik alā bija murkšķu sākumā?

Risinājums:
Ar m apzīmēsim melno murkšķu skaitu, ar v - visu murkšķu skaitu, tad skaidrs, ka izpildās sekojošās nevienādības: $m < \frac{3}{5}v$ un $m+2 > \frac{2}{3}(v+2)$, kas pārrakstās kā $m > \frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$.

Ievērosim, ka tas nozīmē, ka $\frac{3}{5}v > \frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$, kas pārrakstās kā $10 > v$, līdz ar to, tā kā kopējais murkšķu skaits ir vesels, tad $1 \leq v \leq 9$. Tālāk sastādam tabuliņu:

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{3}{5}v$	$\frac{3}{5}$	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{4}{5}$	$2\frac{2}{5}$	3	$3\frac{3}{5}$	$4\frac{1}{5}$	$4\frac{4}{5}$	$5\frac{2}{5}$
$\frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	2	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$	4	$4\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$
Vai eksistē vesels m, ka $\frac{3}{5}v > m > \frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$?	nē	$m = 1$	nē	nē	nē	nē	nē	nē	nē

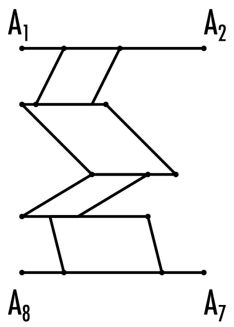
No kurienes seko, ka alā sākumā bija 1 melns un 1 balts (2 kopā) murkšķis.

Piebilde: Uzdevums ļoti skaisti risinās, ja uzzīmē grafiku, un meklē režģa punktus tajā.

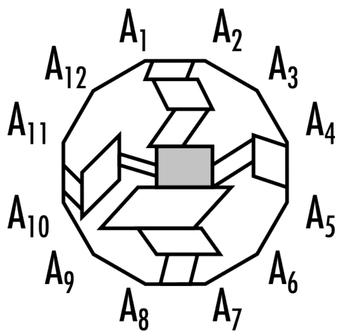
15. Dots regulārs 12 stūris, kas sadalīts paralelogramos. Pierādīt, ka ne mazāk kā 3 paralelogrami šajā dalījumā ir taisnstūri.

Risinājums:
Ievērosim, ka regulāram divpadsmitstūrim ir seši pāri paralēlu malu. Turklāt, katram no sešiem paralēlo malu pāriem atbilst viens perpendikulāru malu pāris. Tātad ir trīs pa pāriem perpendikulāru un pa pāriem paralēlu četru malu komplektu.

Par "paralelogramu ķēdi" sauksim nepārtrauktu paralelogramu virkni, kas savieno divas pretējas paralēlas malas, kā tas parādīts 9. zīmējumā. Katrām divām paralēlām malām eksistē nepārtraukta paralelogramu ķēde, jo uz katras 12 stūra malas balstās vismaz viens paralelograms, savukārt šim paralelogramam ir mala, kas ir paralēla 12-stūra malai, un uz paralelogramam malas balstās vēlviens un tā tālāk, līdz mēs sasniedzam pretējo 12-stūra malu.



9. zīm.



10. zīm.

Ievērosim, ka, ja mēs apskatam paralelogramu ķēdi, kas atbilst perpendikulārajam malu pārim, tad noteikti ir viens paralelograms, kas pieder abām paralelogramu ķēdēm, kā parādīts 10. zīmējumā. Ievērosim, ka kopējais paralelograms noteikti ir taisnstūris, jo tā malas ir paralēlas perpendikulārām 12-stūra malām.

Tā kā ir trīs pa pāriem perpendikulāru un pa pāriem paralēlu četru malu komplektu, tad ir arī vismaz 3 taisnstūru, kas bija jāpierāda.

Pielikums

Spēles **Bums** apraksts:

Sauksim skaitli par *cipariski saliktu*, ja tas nav pirmskaitlis un tā ciparu summa nav pirmskaitlis.

(Pirmskaitlis ir skaitlis, kas dalās tieši ar diviem skaitļiem: ar sevi un ar 1. Piemēram, $5, 13, 29$ ir pirmskaitļi, bet, piemēram, $4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4, 20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 10, 111 = 3 \cdot 37 = 1 \cdot 111$ nav. Skaitlis 1 **nav** pirmskaitlis, jo dalās tikai ar vienu skaitli, nevis diviem)

Sastājies aplī ar $3 - 7$ draugiem un sagatavojies aizraujošai spēlei!

Spēle sākas, kad kāds nosauc cipariski saliktu skaitli, un gājiens pāriet pie nākošā spēlētāja pulksteņa rādītāja virzienā.

Nosauktais skaitlis kļūst par "spēles skaitli", un katru gājienu tā vērtība palielinās par 1 (neatkarīgi no tā, ko pateica iepriekšējais spēlētājs).

Gājieni norisinās pa apli, un mērķis ir saprast pēc iespējas ātrāk, vai tagadējais spēles skaitlis ir cipariski salikts, vai nē.

Kad pienāk tava kārta:

a) Ja spēles skaitlis ir cipariski salikts, tad tev tas ir skaļi jānosauc.

b) Ja tas nav cipariski salikts, tad ir jāsaka **bums!**.

c) Ja tu vilcinies par ilgu un nevari izdomāt vai pasaki nepareizi, tad tev ir jāiziet no apļa, un spēle sākas no jauna ar atlikušajiem spēlētājiem.

Par *bums ķēdi* sauksim nepārtrauktu virkni ar **bums!** izsaucieniem no spēlētājiem. Derīga bums ķēde ir tāda, kuras gaitā neviens no spēlējājiem nav kļūdījies ar savu **bums!** izsaucienu. Par bums ķēdes garumu sauksim kopējo **bums!** izsaucienu skaitu ķēdē.

Piemērs spēlei starp trim spēlētājiem: Āro (A), Karelu (K) un Mēriju (M):

1. Āro pasaka 46 (tas ir cipariski salikts),
2. Karels iesaucas **bums!** (jo 47 ir pirmskaitlis),
3. Mērija saka 48 (tas ir cipariski salikts),
4. A: **bums!** (49 ciparu summa ir pirmskaitlis),
5. K: **bums!** (50 ciparu summa ir pirmskaitlis),
6. M: 51 (cipariski salikts),
7. A: **bums!** (52 ciparu summa ir pirmskaitlis)
8. K: **bums!** (53 ir pirmskaitlis)
9. M: 54 (tas ir cipariski salikts)
10. A: 55 (tas ir cipariski salikts)
11. K: 56 (kļūda, 56 ciparu summa ir pirmskaitlis, tādēļ 56 nav cipariski salikts un bija jāsaka **bums!**)
12. Spēle sākas no jauna

    Šajā spēlē garākās derīgās bums ķēdes garums ir 2, un ir divas derīgas bums ķēdes šādā garumā, viena, kad spēles skaitlis ir 49 un 50, otra, kad spēles skaitlis ir 52 un 53.