atvērtā kopa 2017

Komandu olimpiāde matemātikā
Atrisinājumi 8. klasei

1. Arbūza sastāvā ir 99% ūdens, tomēr, kad to atstāja saulē uz stundu, daļa ūdens iztvaikoja, un tagad tikai 98% arbūza ir ūdens. Kādu daļu sākotnējās masas arbūzs ir zaudējis?

   Risinājums 1:
   Pieņemsim, ka arbūza masa ir 100 arbūzēni, saīsināsim kā 100 az (mērvienība ir izdomāta, bet tā, kā mums interesē tikai masu attiecības, tad mērvienības nav tik svarīgas). Tātad sākumā ūdens sver 99 az un sausais atlikums sver 1 az. Pēc izžūšanas, mums ir 98% ūdens, un tātad 2% sausnes. Sausnes masa nav mainījusies, tātad

   $$2\% = 1 \text{ az}$$

   $$98\% = \text{ ūdens pēc saules}$$

   Reizinam šķērsām un iegūstam, ka ūdens pēc saules $= \frac{1 \cdot 98}{2} = 49$ az. Tātad arbūzs tagad sver $49 + 1 = 50$ az, tātad pazaudēja 50 az, kas atbilst 50% no sākotnējās masas.

   Risinājums 2:
   a - arbūza kopējā masa
   u - ūdens masa arbūzā sākumā
   z - zaudētā ūdens masa

   $$\frac{u}{a} = \frac{99}{100} \Leftrightarrow 100u = 99a$$

   $$\frac{u-z}{a-z} = \frac{98}{100} \Leftrightarrow 100u - 100z = 98a - 98z$$

   $$100u - 98a = 2z \Leftrightarrow 99a - 98a = 2z \Leftrightarrow a = 2z \Leftrightarrow 0.5 \cdot a = z$$

   tātad zudumi z ir puse no sākotnējās masas.

   Risinājums 3:
   a - arbūza kopējā masa
   b - arbūza sausnes masa
   z - zaudētā ūdens masa

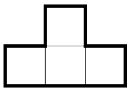
   $$\frac{b}{a} = 1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$$

   $$\frac{b}{a-z} = \frac{2}{100}$$

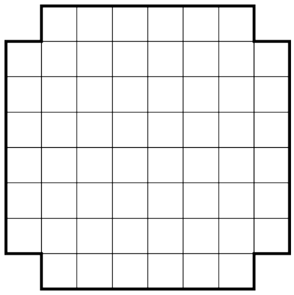
   Tas nozīmē, ka

   $$\frac{a-z}{a} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a-z}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{z}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{z}{a} = \frac{1}{2}$$

2. Uldža atrada bezgalīgi daudz T-tetramino veida figūru (skat. 1. zīmējumu).



1. zīm.



2. zīm.

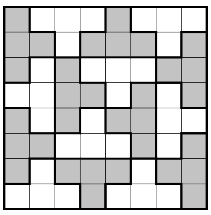
Vai Uldža varēs noklāt ar šīm figūrām tā, lai tās nepārklājas:

a) 8×8 rūtiņu laukumu;

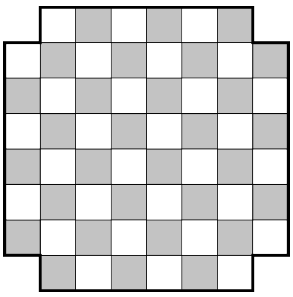
b) 8×8 rūtiņu laukumu, kam izgriezti visi stūrīši, kā parādīts 2. zīmējumā.

Risinājums:

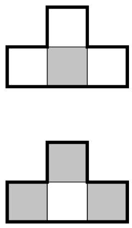
a) Jā, to ir iespējams izdarīt, piemēram, kā parādīts 3. zīmējumā.



3. zīm.



4. zīm.



5. zīm.

b) Nē, to nav iespējams izdarīt, izskaitīsim šaha galdiņa melnās un baltās rūtiņas 4. zīmējumā, ir 30 melnu un 30 baltu, 60 rūtiņas kopā. Tā kā katra T tetromino figūra aizņem 4 rūtiņas, tad mums nepieciešamas $\frac{60}{4} = 15$ figūras.

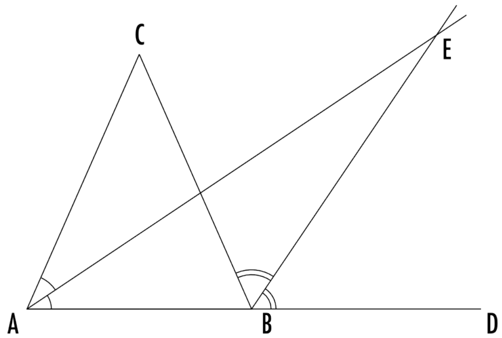
Ievērosim, ka ja mēs novietojam kādu T tetramino figūru uz šaha galdiņa, tad tā noklās nepāra skaitu melno un nepāra skaitu balto rūtiņu (skatīt 5. zīmējumu).

No otras puses tā kā ir nepāra skaits figūru un katra no tām noklāj nepāra skaitu melno rūtiņu, tad, ja galdiņu varētu aizpildīt, tad tiktu noklāts nepāra skaits melno rūtiņu. Bet kopā ir 30 melno rūtiņu, kas ir pāra skaitlis - pretruna. Tātad prasīto paveikt nav iespējams.

3. Vai iespējams, ka, spēlējot spēli **Bums** (skatīt spēles noteikumus pielikumā), četras reizes pēc kārtas tiks pateikts **bums!**, pieņemot, ka neviens no spēlētājiem nekļūdījās? Citiem vārdiem sakot, vai eksistē bums ķēde garumā 4?

   Risinājums:
   Jā, piemēram: Āro: 10 (cipariski salikts) Karels: **bums!** (jo 11 ir pirmskaitlis) Mērija: **bums!** (jo $1 + 2 = 3$ ir pirmskaitlis) A: **bums!** (jo 13 ir pirmskaitlis) K: **bums!** (jo $1 + 4 = 5$ ir pirmskaitlis) M: 15 (cipariski salikts) Ir bums ķēde garumā četri. To ir ļoti ērti atrast, ja izspēlē pāris spēles sākot no 1.

4. Vienādsānu trijstūrī ABC uz pamata AB pagarinājuma ārpus trijstūra atlikts punkts D. Leņķu $\angle DBC$ un $\angle BAC$ bisektrises krustojas punktā E. Pierādīt, ka $\angle ACB = 2\angle BEA$



6. zīm.

Risinājums:
Apzīmēsim $\angle ABC = \alpha$, tad, skaidrs, ka $\angle BAE = \frac{\alpha}{2}$ (bisektrises definīcija).

No otras puses, $\angle CBD = 180 - \angle CBD = 180 - \alpha$, tāpēc $\angle CBE = 90 - \frac{\alpha}{2}$, tādēļ $\angle ABE = \angle ABC + \angle CBE = \alpha + 90 - \frac{\alpha}{2} = 90 + \frac{\alpha}{2}$. No tristūra *ABE* leņķu summas iegūstam, ka $\angle BEA = 180 - \angle ABE - \angle BAE = 180 - \frac{\alpha}{2} - 90 - \frac{\alpha}{2} = 90 - \alpha$.

No trijstūra *ABC* savukārt iegūstam, ka $\angle ACB = 180 - \angle CAB - \angle ABC = 180 - 2\alpha = 2 \cdot (90 - \alpha) = \angle BEA$ Kas bija jāpierāda.

5. Kas ir lielāks $\dfrac{2016}{2017} + \dfrac{2018}{2017}$ vai $\dfrac{2017}{2016} + \dfrac{2017}{2018}$?

Risinājums:
Ievērosim, ka $\frac{2016}{2017} < \frac{2017}{2018}$, jo veinādojumu var pārraksīt kā $2016 \cdot 2018 < 2017^2$, un atsaucot atmiņā kvadrātu starpības formulu $x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$ redzam, ka $2016 \cdot 2018 = 2017^2 - 1 < 2017^2$. Līdzīgi pierādam, ka $\frac{2018}{2017} < \frac{2017}{2016}$.

Bet tad skaidrs, ka arī šo lielumu summām izpildās nevienādība $\frac{2016}{2017} + \frac{2018}{2017} < \frac{2017}{2016} + \frac{2017}{2018}$

6. Klasē ir 30 skolēni, katrs no viņiem brīvajā laikā nodarbojas ar peldēšanu, hokeju vai futbolu. 7 skolēni brīvajā laikā nodarbojas ar peldēšanu, 15 aizraujas ar hokeju, un 14 spēlē futbolu. 3 brīvajā laikā nodarbojas gan ar futbolu, gan ar hokeju, 2 ar hokeju un peldēšanu, un 5 nodarbojas ar futbolu un peldēšanu.

   a) Cik skolēni nodarbojas ar visiem trim sporta veidiem?

   b) Cik skolēni nodarbojas ar tieši vienu sporta veidu?

Risinājums:
a) No uzdevuma nosacījumiem, mēs zinām, ka visi 30 skolēni nodarbojas ar vismaz vienu sporta veidu. Izskaitīsim, cik skolēni nodarbojas ar vismaz vienu sporta veidu, saskaitot kopā skolēnus, kas ndoarbojas ar katru disciplīnu, $7 + 15 + 14 = 36$, bet tas nav pareizi, jo esam ieskaitījuši skolēnus, kas nodarbojas ar diviem sporta veidiem divreiz, vienreiz pie viena sporta veida un vienreiz pie otra. Līdzīgi arī visi skolēni, kas nodarbojas ar trim sporta veidiem tika ieskaitīti trīs reizes.

Lai to izlabotu, atņemsim no rezultāta tos skolēnus, kas nodarbojas ar diviem sporta veidiem: $36 - 3 - 2 - 5 = 26$. Arī tas nav līdz galam pareizi, jo visi skolēni, kas nodarbojas ar visiem trim sporta veidiem sākumā tika atņemti trīs reizes. Tātad galējā summā pietrūkst to skolēnu, kas nodarbojas ar visiem trim sporta veidiem.

Tātad ir $30 - 26 = 4$ skolēni, kas nodarbojas ar visiem trim sporta veidiem.

(Atbilde, diemžēl, ir pretrunīga, jo tikai 2 skolēni nodarbojas gan ar peldēšanu, gan ar futbolu, līdz ar to ne vairāk kā 2 var nodarboties ar peldēšanu, futbolu un hokeju)

b) Izmantojot līdzīgu skaitīšanas ideju, mēs varam izdomāt, ka skolēni, kas nodarbojas ar tieši vienu sporta veidu ir

$$\begin{aligned}&\text{hokejs} + \text{futbols} + \text{peldēšana} -\\ &-2 \cdot \text{hokejs un peldēšana} - 2 \cdot \text{hokejs un futbols} - 2 \cdot \text{peldēšana un futbols} + 3 \cdot \text{visi trīs} =\\ &= 7 + 15 + 14 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 28\end{aligned}$$

7. Atim ir ļoti daudz zaķu. Viņš izdomāja tos izskaitīt, dažādos veidos sadalot tos pa būrīšiem, būrīšu ir daudz vairāk nekā zaķu. Ja zaķus liek burīšos pa diviem zaķiem katrā, viens zaķis paliek pāri. Ja liek burīšos pa trim, arī viens paliek pāri. Ja liek pa četriem, pieciem vai sešiem, tad visos gadījumos viens paliek pāri. Savukārt, liekot pa septiņiem, nav zaķa, kas paliktu pāri.

   Zināms, ka Atim ir mazākais iespējamais zaķu skaits, kas apmierina nosacījumus. Cik zaķu ir Atim?

   Risinājums:
   Apzīmēsim prasīto skaitli ar n. Tad $n-1$ dalās gan ar 2, gan ar 3, gan ar 4, gan ar 5, gan ar 6, jo, ja vienu zaķi noņem, tad zaķi tieši saliekās veselā skaitā būrīšu katrā ar attiecīgo skaitu zaķu. Ja skaitlis dalās ar 4, tad tas noteikti dalās arī ar 2. Ja skaitlis dalās gan ar 4 gan ar 3, tad tas noteikti dalās arī ar 6. Līdz ar to pietiek, ka $n-1$ vienaicīgi dalās ar 3, 4 un 5, līdz ar to tas dalās arī ar $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Pirmie pāris 60 daudzkārtņi ir $60, 120, 180, 240, 300$. Tātad sešas mazākās iespējamās n vērtības ir: $61, 121, 181, 241, 301$. Pārbaudot dalāmību ar 7 (n dalās ar 7 jo zaķus var tieši salikt būrīšos pa septiņiem katrā) iegūstam, ka tikai 301 dalās. Līdz ar to ir 301 zaķis un vienlaikus esam pierādījuši ka tā ir mazākā vērtība.

8. Plaknē atzīmēti pieci sarkani punkti, kas veido izliektu piecstūri. Ārpus piecstūra atzīmēts viens zils punkts.Pierādīt, ka var atrast tādu trijstūri ar divām sarkanām un vienu zilu virsotni, ka viens no trijstūra leņķiem nepārsniedz 45 grādus.

   Risinājums:
   Nosauksim zilo punktu par Z un sarkanos punktus sanumurēsim secībā, kādā tos redz punkts Z no labās uz kreiso kā $S_1, S_2 \ldots S_5$.

   Ievērosim, ka ja punkts atrodas ārpus izliekta piecstūra, tad noteikti eksistē tāda taisne l, kas iet cauri punkam Z, ka visi punkti $S1, S2..S5$ atrodas vienā pusē no taisnes (var būt, ka daži punkti atrodas uz taisnes).

   Piemēram, ja mēs pagarinam katru piecstūra malu līdz taisnei, tad jebkura no šīm taisnēm apmierina nosacījumu, ka visi piecstūra punkti atrodas vienā pusē no taisnes, jo piecstūris ir izliekts. Tā kā punkts Z atrodas ārpus piecstūra, tad noteikti eksistē vismaz viena malas pagarinājuma taisne, ka visi sarkanie punkti atrodas vienā taisnes pusē (vai uz taisnes) un punkts Z atrodas otrā pusē (jo pretējā gadījumā Z būtu iekš piecstūra). Ja mēs pabīdam šo taisni, nemainot tās virzienu, līdz tā iet cauri Z, tad skaidrs, ka visi sarkanie punkti vēl aizvien ir vienā taisnes pusē.

   Tas nozīmē, ka leņķis $\angle S_1ZS_5 < 180^\circ$ grādiem. Bet No otras puses $\angle S_1ZS_5 = \angle S_1ZS_2 + \angle S_2ZS_3 + \angle S_3ZS_4 + \angle S_4ZS_5$ ir četru leņķu summa, līdz ar to šo leņķu vidējais aritmētiskais ir $\frac{180}{4} = 45$ grādu. Līdz ar to vismaz viens leņķis nepārsniedz 45 grādus, bet tas nozīmē, ka ja mēs paņemam šo leņķi veidojošos punktus kā trijstūra virsotnes, tad mēs esam atraduši vajadzīgo trijstūri. Kas bija jāpierāda.

9. Rindā novietoti 100 fidget spinneri, neviens nav iegriezts. Labi zināms, ka spineris var atrasties tikai vienā no diviem stāvokļiem: apstādināts vai iegriezts. Kad spineri iegriež, tas turpina griezties bezgalīgi ilgi, kamēr to apstādina.
   Jānis noiet garām un, sākot ar pirmo spineri, nomaina katra spineri stāvokli uz tam pretējo. Pēc tam viņš atkal noiet garām un, sākot ar otro spineri, nomaina katra otrā spinera stāvokli. Tā viņš turpina, kamēr nav izpildījis 100 gājienus, k-tajā gajienā, sākot ar k-to spineri, nomainot katra k-tā spinera stāvokli.
   Kuri spineri griezīsies pēc tam, kad Jānis būs beidzis savas gaitas?

   Risinājums:
   Ievērosim, ka katrs spinneris tiks iegriezts tik reižu, cik dažādu dalītāju ir tā kārtas skaitlim. Līdz ar to, griezīsies visi tie spineri, kuriem ir nepāra skaits dalītāju.

Tikai naturālu skaitļu kvadrātiem ir nepāra skaits dalītāju. Lai to pierādītu, ievērosim, ka ja skaitlis a dalās ar d, tad $\frac{a}{d}$ arī ir a dalītājs. Līdz ar to, ja visiem d izpildās, ka $\frac{a}{d} \neq d$, tad visus dalītājus var sadalīt pāros, līdz ar to ir pāra skaits dalītāju.

No otras puses, ja kādam dalītājam d izpildās, ka $\frac{a}{d} = d$, tad $a = d^2$, iegūstam, ka a ir naturāla skaitļa dalītājs.

Līdz ar to griezīsies visi spineri, kuru kārtas skaitlis ir kvadrāts - $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$.

10. Konfekšu kaste ir taisnstūra rūtiņu režģis, kas ir 5 rūtiņas augsts un 7 rūtiņas plats. Katrā rūtiņā ir pa vienai konfektei. Makss un Morics spēlē sekojošu spēli: Savā gājienā zēns izvēlas vienu konfekti un apēd gan to, gan visas blakusesošās konfektes (par blakusesošu sauc konfekti, kas atrodas rūtiņā, kurai ir kopīga mala ar izvēlētās konfektes malu). Pēc tam ir otra zēna gājiens. Spēle turpinās, līdz ir apēstas visas konfektes.

    Pēc spēles, protams, mamma būs ļoti dusmīga, tomēr abi zēni vienojas, ka vainu uzņemsies tas, kurš būs apēdis vairāk konfekšu. Ja Makss sāk, vai Morics var garantēt to, ka viņš apēdīs mazāk konfekšu nekā Makss? Savu gājienu nav atļauts izlaist.

    Risinājums:
    Jā, Morics var garantēt to, ka viņš apēdīs mazāk konfekšu. Ievērosim, ka, ja Morics vienmēr dara gājienus, kas ir centrāli simetriski pret centrālo rūtiņu, tad viņš nekad nebūs pirmais, kas apēdīs centrālo rūtiņu. No otras puses, tā kā visi viņa gājieni ir simetriski, tad viņš vienmēr būs apēdis tikpat konfekšu kā Makss, līdz brīdim, kad viens no viņiem apēdīs centrālo konfekti. Līdz ar to Moricss būs apēdis mazāk konfekšu kā Makss. (Tā kā ir nepāra skaits konfekšu, tad situācija, kur abi būtu apēduši vienādu skaitu konfekšu ir neiespējama.

11. Andža gribēja uzzināt, cik alā ir melnu un cik baltu murkšķu. Alā ir ļoti tumšs, bet Andža ir pārliecināts, ka alā melno murkšķu ir mazāk par $\frac{3}{5}$ visu murkšķu. Pēkšņi alā ieskrien vēl 2 melni murkšķi. Andža atkal kārtīgi izpēta alu un nonāk pie secinājuma, ka tagad alā melno murkšķu ir vairāk nekā $\frac{2}{3}$ visu murkšķu. Cik alā bija murkšķu sākumā?

    Risinājums:
    Ar m apzīmēsim melno murkšķu skaitu, ar v - visu murkšķu skaitu, tad skaidrs, ka izpildās sekojošās nevienādības: $m < \frac{3}{5}v$ un $m + 2 > \frac{2}{3}(v + 2)$, kas pārrakstās kā $m > \frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$.

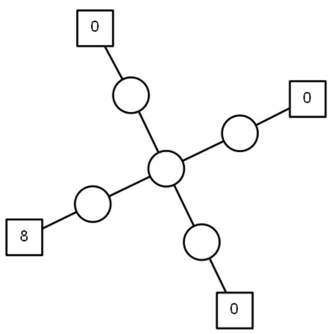
    Ievērosim, ka tas nozīmē, ka $\frac{3}{5}v > \frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$, kas pārrakstās kā $10 > v$, līdz ar to, tā kā kopējais murkšķu skaits ir vesels, tad $1 \leq v \leq 9$. Tālāk sastādam tabuliņu:

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{3}{5}v$	$\frac{3}{5}$	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{4}{5}$	$2\frac{2}{5}$	3	$3\frac{3}{5}$	$4\frac{1}{5}$	$4\frac{4}{5}$	$5\frac{2}{5}$
$\frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	2	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$	4	$4\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$
Vai eksistē vesels m, ka $\frac{3}{5}v > m > \frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$?	nē	$m = 1$	nē	nē	nē	nē	nē	nē	nē

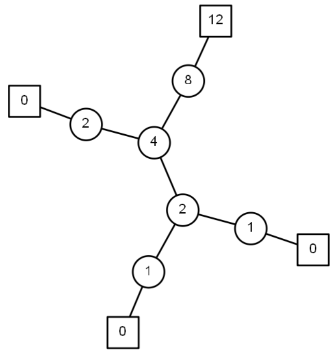
    No kurienes seko, ka alā sākumā bija 1 melns un 1 balts (2 kopā) murkšķis.

    Piebilde: Uzdevums ļoti skaisti risinās, ja uzzīmē grafiku, un meklē režģa punktus tajā.

12. Katrā no 7. zīmējumā esošajiem tukšajiem laucinięm ierakstiet skaitli tā, lai katrā aplītī ierakstītais skaitlis būtu visu blakusesošo lauciņu vidējais aritmētiskais! Lauciņus sauc par blakusesošiem, ja tie ir savienoti ar taisnu līniju zīmējumā.



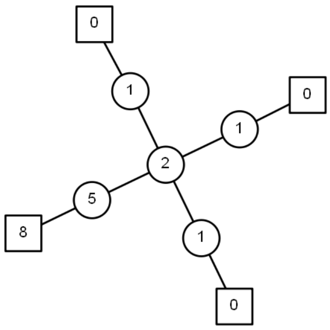
7. zīm.



8. zīm.

Piemēram, var pārbaudīt, ka 8. zīmējumā dotie skaitļi apmierina prasību, ka katrā aplītī ierakstītais skaitlis ir visu blakusesošo lauciņu vidējais aritmētiskais.

Risinājums:
Veigli pārbaudīt, ka 9. zīmējumā attēlotie skaitļi apmierina uzdevuma prasības.



9. zīm.

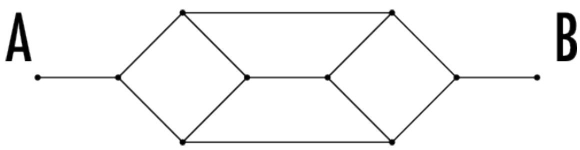
Prasītos skaitļus viegli var iegūt, ja apzīmē centrālajā aplītī ierakstīto skaitli ar x, un ievēro, ka apkārt tam izvietojušies $\frac{x+8}{2}, \frac{x+0}{2}, \frac{x+0}{2}, \frac{x+0}{2}$, kas nozīmē, ka

$$x = \frac{\frac{x+8}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{4} \Rightarrow x = \frac{4x+8}{8} \Rightarrow x = 2$$

Kad iegūts centrālai skaitlis, iegūt pārējos kļūst ļoti vienkārši.

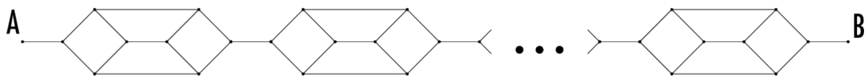
13. Pilsētā ir 71 māja. Zināms, ka no katras mājas iziet tieši viens ceļš, katrā krustojumā satiekas tieši trīs ceļi un no katras mājas var aiziet līdz jebkurai citai mājai pārvietojoties tikai pa ceļiem. Vai kādā no krustojumiem var uzbūvēt veikalu tā, lai no jebkuras mājas ejot pa ceļu varētu nokļūt līdz veikalam, šķērsojot ne vairāk kā 35 krustojumus?

Risinājums:
Prasīto nevar izpildīt. Ievērosim sekojoša veida pilsētu, kur A un B ir mājas, savukārt atzīmētie punkti ir krustojumi:



10. zīm.

Ievērosim, ka šajā pilsētā ir tikai divas mājas, toties ir 8 krustojumi. Papildus, ievērosim, ka iespējams pagarināt doto kostrukciju ar patvaļīgu skaitu krustojumu, vienkārši atkārtojot doto krustojumu ķēdi, turklāt vēlaizvien paliek tieši 2 mājas. Līdz ar to, ja mēs iedomājamies, ka ķēde tiek pagarināta, līdz starp A un B atrodas 8000 krustojumi, tad skaidrs, ka attālums vai nu no A vai no B līdz jebkuram krustojuma punktam būs vismaz 36, bet tad, ja mēs punktā B piebūvējam vēl pāris mājas, līdz to skaits ir 71 kopā (tā lai uzdevuma nosacījumi tiktu ievēroti, kas, protams, ir iespējams) tad mums ir pilsēta, kurā nevar uzbūvēt veikalu kādā no krustojumiem tā, lai attālums līdz jebkurai mājai būtu ne vairāk kā 35 krustojumi.



11. zīm.

14. Par *astotniecisku kvadrātu* sauksim tādu naturāla skaitļa kvadrātu, kuram ir tieši astoņi cipari un tā pēdējo četru ciparu veidotais skaitlis ir astoņas reizes lielāks nekā pirmo četru ciparu veidotais skaitlis (piemēram, 10098072 apmierina pēdējo prasību, jo $8072 = 8 \cdot 1009$, bet nav naturāla skaitļa kvadrāts).

   Atrast, ar pamatojumu, vienu astotniecisku kvadrātu.

   Risinājums:

   Apzīmēsim pirmo (no kreisās puses) četru ciparu veidoto skaitli ar n, skaidrs, ka $n \geq 1000$, jo tas ir četrciparu skaitlis, kura pirmais cipars nevar būt 0, jo tad sākotnējais skaitlis nebūtu astoņciparu skaitlis.

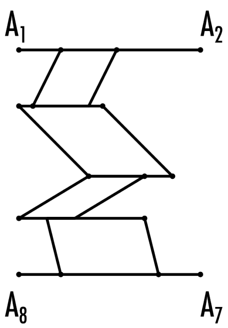
   Ievērosim, ka meklētie kvadrāti izsakās formā $10000n + 8n = 10008n = n \cdot 36 \cdot 278 = 6^2 \cdot 278n$. Tā kā 36 ir kvadrats, tad lai $36 \cdot 278 \cdot n$ būtu kvadrāts, arī $278 \cdot n$ ir jābūt kvadrātam. Ievērosim, ka ja $n = 4 \cdot 278 = 1112$, tad $278 \cdot n = (2 \cdot 278)^2$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, līdz ar to 11128896 ir astotniecisks kvadrāts.

15. Dots regulārs 12 stūris, kas sadalīts paralelogramos. Pierādīt, ka ne mazāk kā 3 paralelogrami šajā dalījumā ir taisnstūri.

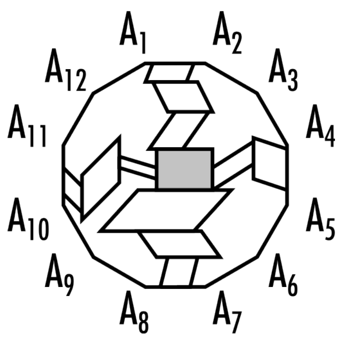
   Risinājums:

   Ievērosim, ka regulāram divpadsmitstūrim ir seši pāri paralēlu malu. Turklāt, katram no sešiem paralēlo malu pāriem atbilst viens perpendikulāru malu pāris. Tātad ir trīs pa pāriem perpendikulāru un pa pāriem paralēlu četru malu komplektu.

   Par "paralelogramu ķēdi" sauksim nepārtrauktu paralelogramu virkni, kas savieno divas pretējas paralēlas malas, kā tas parādīts 12. zīmējumā. Katrām divām paralēlām malām eksistē nepārtraukta paralelogramu ķēde, jo uz katras 12 stūra malas balstās vismaz viens paralelograms, savukārt šim paralelogramam ir mala, kas ir paralēla 12-stūra malai, un uz paralelogramam malas balstās vēlviens un tā tālāk, līdz mēs sasniedzam pretējo 12-stūra malu.



12. zīm.



13. zīm.

   Ievērosim, ka, ja mēs apskatam paralelogramu ķēdi, kas atbilst perpendikulārajam malu pārim, tad noteikti ir viens paralelograms, kas pieder abām paralelogramu ķēdēm, kā parādīts 13. zīmējumā. Ievērosim, ka kopējais paralelograms noteikti ir taisnstūris, jo tā malas ir paralēlas perpendikulārām 12-stūra malām.

   Tā kā ir trīs pa pāriem perpendikulāru un pa pāriem paralēlu četru malu komplektu, tad ir arī vismaz 3 taisnstūru, kas bija jāpierāda.

Pielikums

Spēles **Bums** apraksts:

Sauksim skaitli par *cipariski saliktu*, ja tas nav pirmskaitlis un tā ciparu summa nav pirmskaitlis.

(Pirmskaitlis ir skaitlis, kas dalās tieši ar diviem skaitļiem: ar sevi un ar 1. Piemēram, $5, 13, 29$ ir pirmskaitļi, bet, piemēram, $4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4, 20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 10, 111 = 3 \cdot 37 = 1 \cdot 111$ nav. Skaitlis 1 **nav** pirmskaitlis, jo dalās tikai ar vienu skaitli, nevis diviem)

Sastājies aplī ar $3 - 7$ draugiem un sagatavojies aizraujošai spēlei!

Spēle sākas, kad kāds nosauc cipariski saliktu skaitli, un gājiens pāriet pie nākošā spēlētāja pulksteņa rādītāja virzienā.

Nosauktais skaitlis kļūst par "spēles skaitli", un katru gājienu tā vērtība palielinās par 1 (neatkarīgi no tā, ko pateica iepriekšējais spēlētājs).

Gājieni norisinās pa apli, un mērķis ir saprast pēc iespējas ātrāk, vai tagadējais spēles skaitlis ir cipariski salikts, vai nē.

Kad pienāk tava kārta:

a) Ja spēles skaitlis ir cipariski salikts, tad tev tas ir skaļi jānosauc.

b) Ja tas nav cipariski salikts, tad ir jāsaka **bums!**.

c) Ja tu vilcinies par ilgu un nevari izdomāt vai pasaki nepareizi, tad tev ir jāiziet no apļa, un spēle sākas no jauna ar atlikušajiem spēlētājiem.

Par *bums ķēdi* sauksim nepārtrauktu virkni ar **bums!** izsaucieniem no spēlētājiem. Derīga bums ķēde ir tāda, kuras gaitā neviens no spēlējājiem nav kļūdījies ar savu **bums!** izsaucienu. Par bums ķēdes garumu sauksim kopējo **bums!** izsaucienu skaitu ķēdē.

Piemērs spēlei starp trim spēlētājiem: Āro (A), Karelu (K) un Mēriju (M):

1. Āro pasaka 46 (tas ir cipariski salikts),
2. Karels iesaucas **bums!** (jo 47 ir pirmskaitlis),
3. Mērija saka 48 (tas ir cipariski salikts),
4. A: **bums!** (49 ciparu summa ir pirmskaitlis),
5. K: **bums!** (50 ciparu summa ir pirmskaitlis),
6. M: 51 (cipariski salikts),
7. A: **bums!** (52 ciparu summa ir pirmskaitlis)
8. K: **bums!** (53 ir pirmskaitlis)
9. M: 54 (tas ir cipariski salikts)
10. A: 55 (tas ir cipariski salikts)
11. K: 56 (kļūda, 56 ciparu summa ir pirmskaitlis, tādēļ 56 nav cipariski salikts un bija jāsaka **bums!**)
12. Spēle sākas no jauna

    Šajā spēlē garākās derīgās bums ķēdes garums ir 2, un ir divas derīgas bums ķēdes šādā garumā, viena, kad spēles skaitlis ir 49 un 50, otra, kad spēles skaitlis ir 52 un 53.