atvērtā kopa 2017

Komandu olimpiāde matemātikā
Atrisinājumi 9. klasei

1. Arbūza sastāvā ir 99% ūdens, tomēr, kad to atstāja saulē uz stundu, daļa ūdens iztvaikoja, un tagad tikai 98% arbūza ir ūdens. Kādu daļu sākotnējās masas arbūzs ir zaudējis?

   Risinājums 1:
   Pieņemsim, ka arbūza masa ir 100 arbūzēni, saīsināsim kā 100 az (mērvienība ir izdomāta, bet tā, kā mums interesē tikai masu attiecības, tad mērvienības nav tik svarīgas). Tātad sākumā ūdens sver 99 az un sausais atlikums sver 1 az. Pēc izžūšanas, mums ir 98% ūdens, un tātad 2% sausnes. Sausnes masa nav mainījusies, tātad

   $$2\% = 1 \text{ az}$$

   $$98\% = \text{ ūdens pēc saules}$$

   Reizinam šķērsām un iegūstam, ka ūdens pēc saules $= \frac{1 \cdot 98}{2} = 49$ az. Tātad arbūzs tagad sver $49 + 1 = 50$ az, tātad pazaudēja 50 az, kas atbilst 50% no sākotnējās masas.

   Risinājums 2:
   a - arbūza kopējā masa
   u - ūdens masa arbūzā sākumā
   z - zaudētā ūdens masa

   $$\frac{u}{a} = \frac{99}{100} \Leftrightarrow 100u = 99a$$

   $$\frac{u-z}{a-z} = \frac{98}{100} \Leftrightarrow 100u - 100z = 98a - 98z$$

   $$100u - 98a = 2z \Leftrightarrow 99a - 98a = 2z \Leftrightarrow a = 2z \Leftrightarrow 0.5 \cdot a = z$$

   tātad zudumi z ir puse no sākotnējās masas.

   Risinājums 3:
   a - arbūza kopējā masa
   b - arbūza sausnes masa
   z - zaudētā ūdens masa

   $$\frac{b}{a} = 1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$$

   $$\frac{b}{a-z} = \frac{2}{100}$$

   Tas nozīmē, ka

   $$\frac{a-z}{a} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a-z}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{z}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{z}{a} = \frac{1}{2}$$

2. Veikalā pārdod trīs veidu augļus: ābolus, banānus un citronus. Cik veidos var nopirkt tieši trīs augļus?

   Risinājums:
   Ar a apzīmēsim ābolu, ar b - banānu, ar c - citronu. Ar vairāku burtu virkni apzīmēsim pirkumu. Piemēram, *aab* atbilst pirkumam, kurā ir divi āboli un viens banāns. Ievērosim, ka *aab* un *aba* ir viens un tas pats pirkums, jo nav svarīgi, kādā secībā mēs pērkam augļus.

Ievērosim, ka, ja visi nopirktie augļi ir vienādi, tad ir iespējami 3 dažādi veidi, kā iepirkties - *aaa*, *bbb*, *ccc*). Ja visi augļi ir dažādi, tad ir 1 veids - *abc*. Ja divi augļi ir vienādi un viens atšķirās, tad ir 6 veidi, kā tos nopirkt - *aab*, *abb*, *acc*, *baa*, *bcc*, *caa*.

Tātad ir kopā $3 + 6 + 1 = 10$ dažādi veidi, kā nopirkt tieši trīs augļus.

3. Atim ir ļoti daudz zaķu. Viņš izdomāja tos izskaitīt, dažādos veidos sadalot tos pa būrīšiem, būrīšu ir daudz vairāk nekā zaķu. Ja zaķus liek burīšos pa diviem zaķiem katrā, viens zaķis paliek pāri. Ja liek burīšos pa trim, arī viens paliek pāri. Ja liek pa četriem, pieciem vai sešiem, tad visos gadījumos viens paliek pāri. Savukārt, liekot pa septiņiem, nav zaķa, kas paliktu pāri.

   Zināms, ka Atim ir mazākais iespējamais zaķu skaits, kas apmierina nosacījumus. Cik zaķu ir Atim?

   Risinājums:
   Apzīmēsim prasīto skaitli ar n. Tad $n - 1$ dalās gan ar 2, gan ar 3, gan ar 4, gan ar 5, gan ar 6, jo, ja vienu zaķi noņem, tad zaķi tieši saliekās veselā skaitā būrīšu katrā ar attiecīgo skaitu zaķu. Ja skaitlis dalās ar 4, tad tas noteikti dalās arī ar 2. Ja skaitlis dalās gan ar 4 gan ar 3, tad tas noteikti dalās arī ar 6. Līdz ar to pietiek, ka $n - 1$ vienaicīgi dalās ar 3, 4 un 5, līdz ar to tas dalās arī ar $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Pirmie pāris 60 daudzkārtņi ir $60, 120, 180, 240, 300$. Tātad sešas mazākās iespējamās n vērtības ir: $61, 121, 181, 241, 301$. Pārbaudot dalāmību ar 7 (n dalās ar 7 jo zaķus var tieši salikt būrīšos pa septiņiem katrā) iegūstam, ka tikai 301 dalās. Līdz ar to ir 301 zaķis un vienlaikus esam pierādījuši ka tā ir mazākā vērtība.

4. Plaknē atzīmēti pieci sarkani punkti, kas veido izliektu piecstūri. Ārpus piecstūra atzīmēts viens zils punkts.Pierādīt, ka var atrast tādu trijstūri ar divām sarkanām un vienu zilu virsotni, ka viens no trijstūra leņķiem nepārsniedz 45 grādus.

   Risinājums:
   Nosauksim zilo punktu par Z un sarkanos punktus sanumurēsim secībā, kādā tos redz punkts Z no labās uz kreiso kā $S_1, S_2 \dots S_5$.

   Ievērosim, ka ja punkts atrodas ārpus izliekta piecstūra, tad noteikti eksistē tāda taisne l, kas iet cauri punkam Z, ka visi punkti $S1, S2..S5$ atrodas vienā pusē no taisnes (var būt, ka daži punkti atrodas uz taisnes).

   Piemēram, ja mēs pagarinam katru piecstūra malu līdz taisnei, tad jebkura no šīm taisnēm apmierina nosacījumu, ka visi piecstūra punkti atrodas vienā pusē no taisnes, jo piecstūris ir izliekts. Tā kā punkts Z atrodas ārpus piecstūra, tad noteikti eksistē vismaz viena malas pagarinājuma taisne, ka visi sarkanie punkti atrodas vienā taisnes pusē (vai uz taisnes) un punkts Z atrodas otrā pusē (jo pretējā gadījumā Z būtu iekš piecstūra). Ja mēs pabīdam šo taisni, nemainot tās virzienu, līdz tā iet cauri Z, tad skaidrs, ka visi sarkanie punkti vēl aizvien ir vienā taisnes pusē.

   Tas nozīmē, ka leņķis $\angle S_1ZS_5 < 180^\circ$ grādiem. Bet No otras puses $\angle S_1ZS_5 = \angle S_1ZS_2 + \angle S_2ZS_3 + \angle S_3ZS_4 + \angle S_4ZS_5$ ir četru leņķu summa, līdz ar to šo leņķu vidējais aritmētiskais ir $\frac{180}{4} = 45$ grādu. Līdz ar to vismaz viens leņķis nepārsniedz 45 grādus, bet tas nozīmē, ka ja mēs paņemam šo leņķi veidojošos punktus kā trijstūra virsotnes, tad mēs esam atraduši vajadzīgo trijstūri. Kas bija jāpierāda.

5. Kas ir lielāks $\quad \dfrac{2016}{2017} + \dfrac{2017}{2018} + \dfrac{2018}{2016} \quad$ vai $\quad \dfrac{2017}{2016} + \dfrac{2018}{2017} + \dfrac{2016}{2018} \quad$?

   Risinājums:
   Pierādīsim, ka $\frac{2016}{2017} + \frac{2017}{2018} + \frac{2018}{2016} > \frac{2017}{2016} + \frac{2018}{2017} + \frac{2016}{2018}$. Pārnesot attiecīgos lielumus uz vienu vai otru pusi nevienādība pārrakstās kā $\frac{1}{2018} + \frac{1}{2016} > \frac{2}{2017}$ $\frac{2018+2016}{2018 \cdot 2016} > \frac{2}{2017}$ Izmantojot kvadrātu starpības formulu iegūstam, ka nevienādība pārrakstās kā $\frac{2 \cdot 2017}{2017^2 - 1} > \frac{2}{2017}$ Atliek vien pamanīt, ka kreisajai pusei piereizinot $1 = \frac{2017}{2017}$ nevienādība nemainās: $\frac{2 \cdot 2017}{2017^2 - 1} > \frac{2 \cdot 2017}{2017^2}$ Pēdējā nevienādība ir acīmredzama (dalot to pašu ar mazāku skaitli iegūst lielāku vērtību).

6. Konfekšu kaste ir taisnstūra rūtiņu režģis, kas ir 5 rūtiņas augsts un 7 rūtiņas plats. Katrā rūtiņā ir pa vienai konfektei. Makss un Morics spēlē sekojošu spēli: Savā gājienā zēns izvēlas vienu konfekti un apēd gan to, gan visas blakusesošās konfektes (par blakusesošu sauc konfekti, kas atrodas rūtiņā, kurai ir kopīga mala ar izvēlētās konfektes malu). Pēc tam ir otra zēna gājiens. Spēle turpinās, līdz ir apēstas visas konfektes.

Pēc spēles, protams, mamma būs ļoti dusmīga, tomēr abi zēni vienojas, ka vainu uzņemsies tas, kurš būs apēdis vairāk konfekšu. Ja Makss sāk, vai Morics var garantēt to, ka viņš apēdīs mazāk konfekšu nekā Makss? Savu gājienu nav atļauts izlaist.

Risinājums:
Jā, Morics var garantēt to, ka viņš apēdīs mazāk konfekšu. Ievērosim, ka, ja Morics vienmēr dara gājienus, kas ir centrāli simetriski pret centrālo rūtiņu, tad viņš nekad nebūs pirmais, kas apēdīs centrālo rūtiņu. No otras puses, tā kā visi viņa gājieni ir simetriski, tad viņš vienmēr būs apēdis tikpat konfekšu kā Makss, līdz brīdim, kad viens no viņiem apēdīs centrālo konfekti. Līdz ar to Moricss būs apēdis mazāk konfekšu kā Makss. (Tā kā ir nepāra skaits konfekšu, tad situācija, kur abi būtu apēduši vienādu skaitu konfekšu ir neiespējama.

7. Andža gribēja uzzināt, cik alā ir melnu un cik baltu murkšķu. Alā ir ļoti tumšs, bet Andža ir pārliecināts, ka alā melno murkšķu ir mazāk par $\frac{3}{5}$ visu murkšķu. Pēkšņi alā ieskrien vēl 2 melni murkšķi. Andža atkal kārtīgi izpēta alu un nonāk pie secinājuma, ka tagad alā melno murkšķu ir vairāk nekā $\frac{2}{3}$ visu murkšķu. Cik alā bija murkšķu sākumā?

Risinājums:
Ar m apzīmēsim melno murkšķu skaitu, ar v - visu murkšķu skaitu, tad skaidrs, ka izpildās sekojošās nevienādības: $m < \frac{3}{5}v$ un $m + 2 > \frac{2}{3}(v + 2)$, kas pārrakstās kā $m > \frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$.

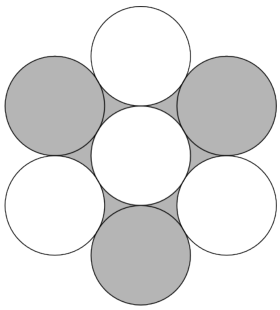
Ievērosim, ka tas nozīmē, ka $\frac{3}{5}v > \frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$, kas pārrakstās kā $10 > v$, līdz ar to, tā kā kopējais murkšķu skaits ir vesels, tad $1 \leq v \leq 9$. Tālāk sastādam tabuliņu:

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{3}{5}v$	$\frac{3}{5}$	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{4}{5}$	$2\frac{2}{5}$	3	$3\frac{3}{5}$	$4\frac{1}{5}$	$4\frac{4}{5}$	$5\frac{2}{5}$
$\frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	2	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$	4	$4\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$
Vai eksistē vesels m, ka $\frac{3}{5}v > m > \frac{2}{3}v - \frac{2}{3}$?	nē	$m = 1$	nē	nē	nē	nē	nē	nē	nē

No kurienes seko, ka alā sākumā bija 1 melns un 1 balts (2 kopā) murkšķis.

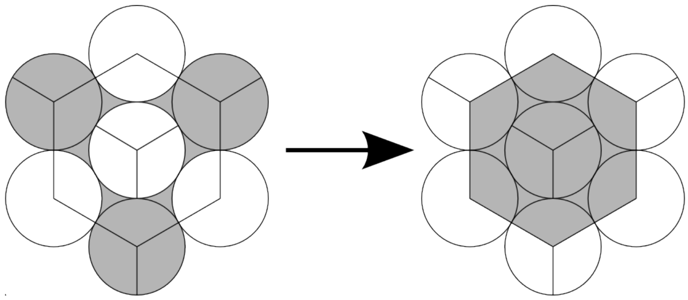
Piebilde: Uzdevums ļoti skaisti risinās, ja uzzīmē grafiku, un meklē režģa punktus tajā.

8. Dotas septiņas vienādas riņķa līnijas ar rādiusu 1 cm, kas pieskaras viena otrai kā parādīts 1. zīmējumā. Aprēķināt iekrāsotās daļas laukumu.



1. zīm.

Risinājums:



2. zīm.

Sagriežam dotās figūras riņķa līnijas trešdaļās un pārvietojam tās, kā parādīts 2. zīmējumā, iegūstot regulāru sešstūri ar malas garumu 2 cm. Tālāk, ievērosim, ka regulārs sešstūris sastāv no sešiem regulāriem trijstūriem ar malas garumu 2 cm. Tālāk, izmantojam regulāra trijstūra laukuma formulu $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ cm^2. Tātad sešstūra laukums ir $6\sqrt{3}$ cm^2 un līdz ar to arī sākotnējās iekrāsotās daļas laukums ir $6\sqrt{3}$ cm^2.

9. Uz tāfeles uzrakstīts daļskaitlis $\dfrac{a}{b}$. Katrā gājienā drīkst ar daļskaitli veikt vienu no sekojošajām darbībām:

   1) Apgriezt to, $\dfrac{a}{b} \longrightarrow \dfrac{b}{a}$

   2) Pieskaitīt 1 un pēc tam izdalīt ar 2, $\dfrac{a}{b} \longrightarrow \dfrac{\frac{a}{b}+1}{2}$

   Ja sākumā uzrakstīts $\dfrac{5}{8}$, vai iespējams atkārtoti pielietojot darbības nonākt līdz a) $\dfrac{20}{23}$ b) $\dfrac{433}{471}$?

   Risinājums:

   a) $\frac{20}{23}$ var iegūt, piemēram, ar sekojošo darbību virkni:

$$\frac{5}{8} \xrightarrow{\text{1) darbība}} \frac{8}{5} \xrightarrow{\text{2) darbība}} \frac{13}{10} \xrightarrow{\text{2) darbība}} \frac{23}{20} \xrightarrow{\text{1) darbība}} \frac{20}{23}$$

   b) Apskatīsim starpību starp skaitītāju un saucēju $a - b$.

   Ievērosim, ka izpildot pirmo darbību, starpība nomaina zīmi $a - b \rightarrow b - a$.

   Izpildot otro darbību $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{\frac{a}{b}+1}{2} = \frac{a+b}{2b}$, mēs iegūstam, ka jaunā starpība ir $a + b - 2b = a - b$, proti tā nav mainījusies.

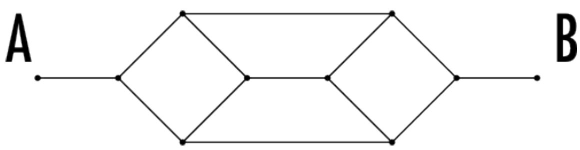
   Tātad starpība starp skaitītāju un saucēju ir invariants (nemainās) izpildot iespējamās darbības, izņemot, iespējams, tā noamina zīmi.

   Tātad, ja mēs sākam ar $\frac{5}{8}$, tad sākotnējā starpība ir $5 - 8 = -3$, līdz ar to jebkura daļa, kuru var iegūt izmantojot darbības, būs ar saucēja skaitītāja starpību $+3$ vai -3. Bet $\frac{433}{471}$ starpība starp saucēju un skaitītāju ir $433 - 471 = -38$. Tātad $\frac{433}{471}$ nevar iegūt, kas bija jāpierāda.

10. Pilsētā ir 71 māja. Zināms, ka no katras mājas iziet tieši viens ceļš, katrā krustojumā satiekas tieši trīs ceļi un no katras mājas var aiziet līdz jebkurai citai mājai pārvietojoties tikai pa ceļiem. Vai kādā no krustojumiem var uzbūvēt veikalu tā, lai no jebkuras mājas ejot pa ceļu varētu nokļūt līdz veikalam, šķērsojot ne vairāk kā 35 krustojumus?

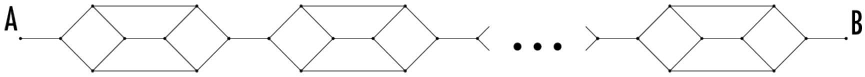
    Risinājums:

    Prasīto nevar izpildīt. Ievērosim sekojoša veida pilsētu, kur A un B ir mājas, savukārt atzīmētie punkti ir krustojumi:



3. zīm.

Ievērosim, ka šajā pilsētā ir tikai divas mājas, toties ir 8 krustojumi. Papildus, ievērosim, ka iespējams pagarināt doto kostrukciju ar patvaļīgu skaitu krustojumu, vienkārši atkārtojot doto krustojumu ķēdi, turklāt vēlaizvien paliek tieši 2 mājas. Līdz ar to, ja mēs iedomājamies, ka ķēde tiek pagarināta, līdz starp A un B atrodas 8000 krustojumi, tad skaidrs, ka attālums vai nu no A vai no B līdz jebkuram krustojuma punktam būs vismaz 36, bet tad, ja mēs punktā B piebūvējam vēl pāris mājas, līdz to skaits ir 71 kopā (tā lai uzdevuma nosacījumi tiktu ievēroti, kas, protams, ir iespējams) tad mums ir pilsēta, kurā nevar uzbūvēt veikalu kādā no krustojumiem tā, lai attālums līdz jebkurai mājai būtu ne vairāk kā 35 krustojumi.



4. zīm.

11. Par *astotniecisku kvadrātu* sauksim tādu naturāla skaitļa kvadrātu, kuram ir tieši astoņi cipari un tā pēdējo četru ciparu veidotais skaitlis ir astoņas reizes lielāks nekā pirmo četru ciparu veidotais skaitlis (piemēram, 10098072 apmierina pēdējo prasību, jo $8072 = 8 \cdot 1009$, bet nav naturāla skaitļa kvadrāts).

    Atrast, ar pamatojumu, vienu astotniecisku kvadrātu.

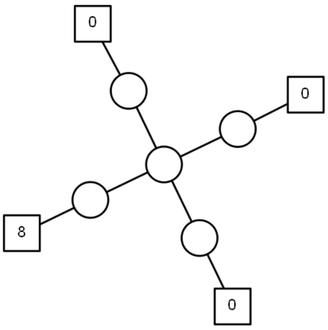
    Risinājums:
    Apzīmēsim pirmo (no kreisās puses) četru ciparu veidoto skaitli ar n, skaidrs, ka $n \geq 1000$, jo tas ir četrciparu skaitlis, kura pirmais cipars nevar būt 0, jo tad sākotnējais skaitlis nebūtu astoņciparu skaitlis.

    Ievērosim, ka meklētie kvadrāti izsakās formā $10000n + 8n = 10008n = n \cdot 36 \cdot 278 = 6^2 \cdot 278n$. Tā kā 36 ir kvadrats, tad lai $36 \cdot 278 \cdot n$ būtu kvadrāts, arī $278 \cdot n$ ir jābūt kvadrātam. Ievērosim, ka ja $n = 4 \cdot 278 = 1112$, tad $278 \cdot n = (2 \cdot 278)^2$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, līdz ar to 11128896 ir astotniecisks kvadrāts.

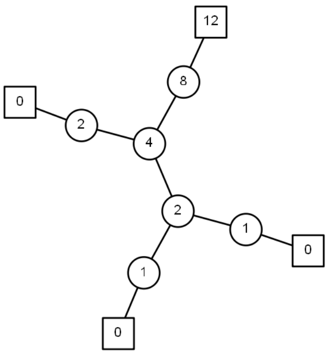
12. Uz trapeces $ABCD$ garākā pamata AD atlikts punkts E tā, ka $DE = BC$. Malu AB un CD pagarinājumu krustpunkts ir F. Uz CD pagarinājuma atlikts punkts G tā, ka $CG = BE$. Pierādīt, ka $\angle BEC + \angle BFG = \angle FBG$.

    Risinājums:
    Diemžēl uzdevums tika noformulēts nepareizi un jēgpilns atrisinājums neeksistē.

13. Katrā no 5. zīmējumā esošajiem tukšajiem lauciņiem ierakstiet skaitli tā, lai katrā aplītī ierakstītais skaitlis būtu visu blakusesošo lauciņu vidējais aritmētiskais! Lauciņus sauc par blakusesošiem, ja tie ir savienoti ar taisnu līniju zīmējumā.



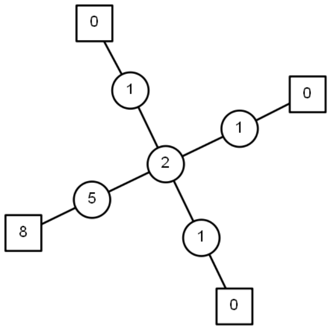
5. zīm.



6. zīm.

Piemēram, var pārbaudīt, ka 6. zīmējumā dotie skaitļi apmierina prasību, ka katrā aplītī ierakstītais skaitlis ir visu blakusesošo lauciņu vidējais aritmētiskais.

Risinājums:
Veigli pārbaudīt, ka 7. zīmējumā attēlotie skaitļi apmierina uzdevuma prasības.



7. zīm.

Prasītos skaitļus viegli var iegūt, ja apzīmē centrālajā aplītī ierakstīto skaitli ar x, un ievēro, ka apkārt tam izvietojušies $\frac{x+8}{2}$, $\frac{x+0}{2}$, $\frac{x+0}{2}$, $\frac{x+0}{2}$, kas nozīmē, ka

$$x = \frac{\frac{x+8}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{4} \Rightarrow x = \frac{4x+8}{8} \Rightarrow x = 2$$

Kad iegūts centrālai skaitlis, iegūt pārējos kļūst ļoti vienkārši.

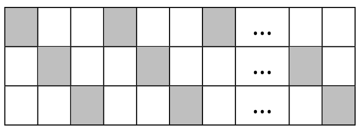
14. Jānim ir 99 flīzes, ar kurām viņš vēlas noklāt vannas istabas sienu. Kāds ir mazākais skaits flīžu, kādu viņam ir jānokrāso, obligāti jānokrāso vismaz viena flīze, lai būtu iespējams ar flīzēm izklāt taisnstūra laukumu tā, lai visās rindās būtu vienāds skaits nokrāsoto flīžu un visās kolonās būtu vienāds nokrāsoto flīžu skaits? Flīžu skaitam rindā un flīžu skaitam kolonnā ne obligāti jāsakrīt. Flīze vienmēr tiek nokrāsota pilnībā, un flīzes nedrīkst pārgriezt. Taisnstūra izmērus Jānis izvēlas pats, bet taisntūrī ir jābūt izmantotām visām 99 flīzēm.

Risinājums:
Apzīmēsim minimālo skaitu ar skaitli n. Ar x apizīmēsim raisnstūra rindu skaitu un ar y kolonnu skaitu. Ievērojam to, ka $x \cdot k_1 = y \cdot k_2$, kur k_1, k_2 ir nokrāsoto flīžu skaits attiecīgi kolonnā un rindā. Ievērojam vēl, ka $n = x \cdot k_1$ un $n = y \cdot k_2$, kur n ir kopējais nokrāsoto flīžu skaits.

Tātad $n \geq \text{mkd}(x, y)$, kur $\text{mkd}(x, y)$ ir mazākais kopīgais x un y dalāmais, jo x dala n un y dala n. Ievērosim vienādību $\text{mkd}(x, y) = \frac{xy}{\text{lkd}(x,y)}$, kur $\text{lkd}(x, y)$ ir skaitļu x un y lielākais dalītājs. Tātad mums pietiek atrast $\text{lkd}(x, y)$ lielāko iespējamo vērtību lai atrastu n mazāko iespējamo vērtību, jo $x \cdot y = 99$ ir fiksēts.

$\text{lkd}(x, y)$ lielākā vērtība ir 3 (tas seko no dalījuma pirmreizinātājos $99 = 3^2 \cdot 11$, un to var pierādīt sastādot mazu tabuliņu ar visiem iespējamajiem dalītāju pāriem). Tātad $n \geq \frac{99}{3} = 33$.

Par laimi eksistē tieši konstrukcija šim gadījumam. Paņemam $x = 33$; un $y = 3$. Tad aizpildam visu taisnstūri kā parādīts zemāk:



15. Pierādīt, ka trijstūrī pret garāko malu atrodas a) īsākais augstums; b) īsākā mediāna!

Risinājums:

a) Ievērosim, ka trijstūra laukums izsakās kā $S = \frac{1}{2}a \cdot h$. Līdz ar to varam izteikt $h = \frac{2S}{a}$. Tā kā S ir nemainīgs lielums jebkuram trijstūrim, tad vismazāko vērtību augstums h sasniedz tad, kad a ir vislielākais (dalot ar lielāku skaitli iegūstam mazāku skaitli). Tātad visīsākais augstums tiešām atrodas pret garāko malu.

b) Trijstūrī ABC novilksim visas trīs mediānas AP, BQ, QR, to krustpunktu apzīmēsim ar M. Nezaudējot vispārību pieņemsim, ka CB ir garākā mala.

   Nav grūti pierādīt, ka mediānas dala trijstūri sešos vienlielos (ar vienādu laukumu) trijstūros.

No P novilksim augstumu PS pret malu MB, un no R novilksim augstumu RT pret malu MB. Tā kā trijstūru MPB un MRB laukumi ir vienādi, tad, tā kā pamats MB ir kopējs, tad augstumi sakrīt $PS = RT$. Pielietojot Pitagora teorēmu, iegūstam, ka $SB^2 = PB^2 - PS^2 = \frac{1}{4}CB^2 - PS^2$ un $TB^2 = BR^2 - RT^2 = \frac{1}{4}AB^2 - PS^2$, un, tā kā $BC \geq AB$ pēc pieņēmuma, tad $SB^2 = \frac{1}{4}CB^2 - PS^2 \geq \frac{1}{4}AB^2 - PS^2 = TB^2$, līdz ar to $SB \geq TB$. No tā seko, ka $SM = MB - SB \leq MB - TB = MT$, savukārt no tā seko, ka $MP^2 = SM^2 + SP^2 \leq TM^2 + SP^2 = TM^2 + TR^2 = MR^2$. Līdz ar to $MP \leq MR$. Līdzīgi, apskatot $MPQC$, pierādam, ka $MP \leq MQ$.

Novilksim agstumu AU pret malu MR un agstumu BV pret MR. Līdzīgi kā iepriekš, iegūstam, ka $AU = BV$ kā augstumi, kas balstā uz vienu un to pašu pamatu vienlielos trijstūros. Ievērosim, ka, tā kā $AC \leq CB$ pēc pieņēmuma, tad $CU^2 = CA^2 - AU^2 \leq CB^2 - AU^2 = CB^2 - BV^2 = CV^2$. Līdz ar to $CU \leq CV$, tātad arī $MU = CU - CM \leq CV - CM = MV$, tādēļ $MA^2 = MU^2 + AU^2 \leq MV^2 + AU^2 = MV^2 + BV^2 = MB^2$, līdz ar to $MA \leq MB$. Līdzīgi, apskatot AMC, iegūstam, ka $AM \leq CM$.

Apvienojot $MP \leq MR$ un $AM \leq MC$, iegūstam, ka $AP = AM + MP \leq CM + MR = CR$. Līdzīgi iegūstam, ka $AP \leq BQ$. Tātad AP ir īsākā mediāna, un patiesi tā atrodas pret garāko malu CB, kas bija jāpierāda.