atvērtā kopa 2018

Komandu olimpiāde matemātikā
Atrisinājumi 10. klasei

1. Pierādīt, ka $x^6 - x^3 + 7 > 0$ visiem reāliem skaitļiem x!

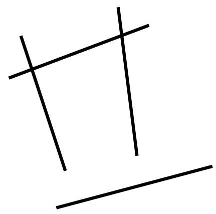
   Risinājums: Var ievērot, ka $x^6 - x^3 + 7 = (x^3 - \frac{1}{2})^2 + 6\frac{3}{4}$. Kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs un $6\frac{3}{4}$ ir pozitīvs skaitlis.

2. Vai iespējams 4 nogriežņus izkārtot tā, ka katrs no tiem krustojas ar

   a) $1, 2, 2$ un 3 citiem nogriežņiem;

   b) $1, 2, 3$ un 3 citiem nogriežņiem?

   Gadījums, kur krustotos ar 0, 1, 1 un 2 nogriežņiem, parādās 1. zīmējumā.

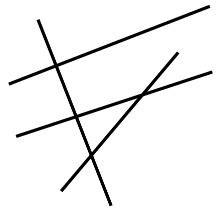
   

   1. zīm.

   Risinājums:

   a) Var, piemēram kā parādīts 2. attēlā:

   b) Varam ievērot, ka nogriežņu krustošanās ir abpusēja, bet šeit kopējais krustošanās daudzums ir $1 + 2 + 3 + 3 = 9$ - nepāra skaitlis, tātad izkārtojums nav iespējams.

   2. zīm.

3. Cik ir tādu taisnleņķa trijstūru, kuru perimetrs un laukums ir vienādi un visas malas ir naturāli skaitļi?

   Risinājums: Apzīmēsim trijstūra katetes ar x un y. Tad $P = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ pēc Pitagora teorēmas un $S = \frac{1}{2}xy$. Veiksim ekvivalentus vienādības $S = P$ pārveidojumus:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}xy &= x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \\
xy - 2x - 2y &= 2\sqrt{x^2 + y^2} && \text{Kāpinām abas puses kvadrātā} \\
x^2y^2 + 4x^2 + 4y^2 - 4x^2y - 4xy^2 + 8xy &= 4x^2 + 4y^2 \\
x^2y^2 - 4x^2y - 4xy^2 + 8xy &= 0 \\
xy(xy - 4x - 4y + 8) &= 0 && \text{Drīkstam dalīt abas puses ar } xy \neq 0 \\
xy - 4x - 4y + 8 &= 0 \\
(x-4)(y-4) &= 8
\end{aligned}$$

   Tā kā x, y ir naturāli, tad arī $x-4, y-4$ ir naturāli skaitļi. Skaitli 8 var izteikt kā divu naturālu skaitļu reizinājumu divos veidos $8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$, līdz ar to iegūstam, ka $x = 5, y = 12$ vai $x = 6, y = 8$ (ievērosim, ka nav nepieciešams apskatīt simetriskos gadījumus, jo taisnleņķa trijstūra katešu secībai nav nozīmes). Viegli pārbaudīt, ka taisnleņķa trijstūri ar malām $5, 12, 13$ un $6, 8, 10$ patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus. Tātad ir tieši divi taisnleņķa trijstūri, kuru malas ir veseli skaitļi, un perimetrs sakrīt ar laukumu.

4. Dots trijstūris ABC. Uz malas AB atlikts nogrieznis FN tāds, ka $AF = FN = NB$. Uz malas CB atlikts punkts E tāds, ka $FE \parallel AC$. H ir FE viduspunkts. Ja $FE = EB$, pierādīt, ka četrstūris $HNEC$ ir paralelograms.

   Risinājums:

1) Punktus F un N uz nogriežņa AB var atlikt tikai secībā A, F, N, B, citādi F un N sakrīt, kas ir pretrunā ar to, ka FN ir nogrieznis.
2) $FE \parallel AC$ un $AF = \frac{1}{3}AB \implies CE = \frac{1}{3}CB$, $EB = \frac{2}{3}CB$.
3) H - FE viduspunkts un N - FB viduspunkts, tātad NH ir $\triangle EFB$ viduslīnija. No tā seko, ka $NH \parallel EB$ un $NH = \frac{1}{2}EB$.
4) $NH = \frac{1}{2}EB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}CB = \frac{1}{3}CB$
5) $NH \parallel EB$ (c), tātad arī $NH \parallel CE$. $CE = \frac{1}{3}CB$ (b) un $NH = \frac{1}{3}CB$ (d). No paralelograma pazīmes seko, ka $HNEC$ ir paralelograms.

5. Izpildās vienādība

$$2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot \ldots \cdot 2018^{2018} \cdot 2018^{2018} = 2018^{2018^{2018}}$$

Cik reižu skaitlis 2018 parādās vienādības kreisajā pusē?

Risinājums: Ar n apzīmēsim cik daudz reižu skaitlis 2018^{2018} parādās vienādības kreisajā pusē. Ievērosim, ka reizināt skaitli ar sevi n reizes nozīmē kāpināt skaitli pakāpē n, tātad

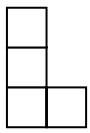
$$\underbrace{2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot \ldots \cdot 2018^{2018}}_{n \text{ reizes}} = \left(2018^{2018}\right)^n$$

Uzdevumā dotā vienādība pārtop par

$$\begin{aligned}
\left(2018^{2018}\right)^n &= 2018^{2018^{2018}} && \text{Izmantojam pakāpju īpašības} \\
2018^{2018 \cdot n} &= 2018^{2018^{2018}} && \text{Pielīdzinām kāpinātājus} \\
2018 \cdot n &= 2018^{2018} && \text{Dalām abas puses ar 2018} \\
n &= 2018^{2017}
\end{aligned}$$

Līdz ar to redzam, ka 2018^{2018} vienādības kreisajā pusē parādās 2018^{2017} reizes. Atliek vien ievērot, ka 2018^{2018} satur divus 2018, līdz ar to skaitlis 2018 vienādības kreisajā pusē parādās $2 \cdot 2018^{2017}$ reizes.

6. Dots, ka $m \times n$ rūtiņu laukums ir pilnībā noklāts ar L veida tetramino figūrām (3. zīm.), kuras nepārklājas. Pierādīt, ka šīs figūras ir pāra skaitā.



3. zīm.

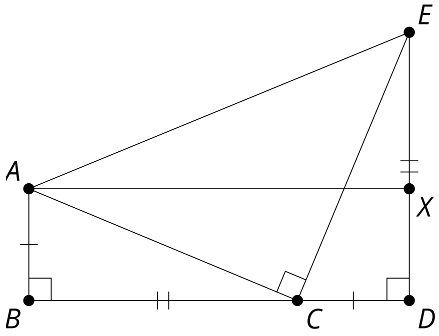
Risinājums: L veida figūra aizņem 4 rūtiņas, tāpēc zināms, ka rūtiņu laukums dalās ar 4. Pieņemam, ka kolonnas ir pāra skaitā, un katru otro kolonnu nokrāsojam melnu. Baltās un melnās rūtiņas ir vienā skaitā, jo kolonnu skaits ir pāra. Lai kā novietotu L figūru uz iekrāsotā laukuma, tā aizņem 3 baltas vai 3 melnas rūtiņas, bet, lai noklātu rūtiņu laukumu, baltajām un melnajām rūtiņām jābūt vienā skaitā. Tātad L figūrām jābūt pāra skaitā.

7. Skaitļi p, q un $p^q + q^p$ visi ir pirmskaitļi. Kādas ir iespējamās p un q vērtības?

Risinājums: Ja p un q abi ir nepāra, tad $p^q + q^p$ ir pāra un lielāks par divi, tātad nav pirmskaitlis. Ja p un q abi ir pāra, tad $p = q = 2$ un $p^q + q^p = 8$ - nav pirmskaitlis. Tātad tieši viens no p vai q ir pāra, pieņemsim, ka tas ir q; $q = 2$. Tad $2^p + p^2$ ir pirmskaitlis. p - nepāra, tātad $2^p = 2 (\text{mod } 3)$, savukārt, ja p nedalās ar 3, pēc Mazās Fermā teorēmas $p^2 = 1 (\text{mod } 3)$. Tātad $p^q + q^p = 2^p + p^2 \equiv 2 + 1 = 3 \equiv 0$ (mod 3) jeb $p^q + q^p$ dalās ar 3. Vienīgais atlikušais variants ir $q = 3$. Pārbaudot, $p^q + q^p = 17$, kas ir pirmskaitlis. Esam ieguvuši, ka vienīgās iespējamās vērtības ir $(2; 3)$ vai $(3; 2)$.

8. Taisnleņķa trijstūra ABC hipotenūza ir AC. Pierādīt, ka $AB + BC \leq \sqrt{2}AC$.

Risinājums:



4. zīm.

Uz malas BC pagarinājuma atliksim punktu D tā, ka $CD = AB$. No punkta D konstruēsim perpendikulu pret malu CD. Uz perpendikula atliksim punktu E tā, ka $ED = BC$ un ka E atrodas tajā pašā pusē taisnei BD kā punkts A.

Tā kā $AB = CD$, $\angle ABC = \angle CDE$, $BC = DE$, tad $\triangle ABS = \triangle CDE(mlm)$. Bet tas nozīmē, ka $AC = CE$, papildu, $\angle ACE = 180^\circ - \angle ACB - \angle ECD = 90^\circ$, līdz ar to varam aprēķināt $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = AC\sqrt{2}$ pēc Pitagora teorēmas.

Atliek vien ievērot, ka, ja mēs konstruējam perpendikulu AX no A pret malu DE, tad $ABDX$ ir taisnstūris un līdz ar to $AX = BD = BC + CD = AB + BC$. Bet no trijstūra nevienādības trijstūrī AEX izriet, ka

$$AB + BC = AX \leq AE - EX \leq AE = \sqrt{2}AC$$

Kas arī bija jāpierāda.

9. Seši astoņkāji izpilda deju. Vispirms nejaušs skaits astoņkāju sadodas rokās ar taustekļiem. Pēc tam tie atkārto sekojošu soli ik pa minūtei: visi astoņkāji, kas bija sadevušies rokās, atlaiž rokas, un visi tie, kas nebija sadevušies rokās, sadodas rokās. Pierādīt, ka kādā brīdī varēs atrast trīs astoņkājus, kuri ir sadevušies rokās katrs ar katru. Katram astoņkājim ir 8 taustekļi, un divi astoņkāji sadodas rokās tikai ar vienu taustekli katrs.

   Risinājums: Apskatam vienu astoņkāji, nosauksim to par A. Vai nu pirmajā vai otrajā solī tas būs sadevies rokās ar vismaz trīs citiem astoņkājiem - B, C un D. Ja B un C arī ir sadevušies rokās, tad A, B, C astoņkāji izpilda prasīto. Ja C un D ir sadevušies rokās, tad A, C, D izpilda prasīto. Ja B un D būs sadevušies, tad A, B, D izpildīsies. Ja ne B un C, ne B un D un ne C un D būs sadevušies ar taustekļiem, tad nākamajā solī tie sadosies un B, C, D izpildīs prasīto.

10. Vai jebkuru divu dažādu naturālu skaitļu a un b kvadrātiem eksistē naturāls c, ka tieši viens no skaitļiem $c + a^2$ un $c + b^2$ ir naturāla skaitļa kvadrāts?

   Risinājums: Nezaudējot vispārību pieņemsim $a > b$, jo tie ir dažādi pēc uzdevuma nosacījumiem. Izvēlamies $c = \left(a^2 - b^2\right)^2 - b^2$. c is naturāls, jo, $a > b$ nozīmē, ka $a \geq b + 1$, līdz ar to

$$c = \left(a^2 - b^2\right)^2 - b^2 = \left(a^2 - b^2 - b\right)\left(a^2 - b^2 + b\right) \geq \left((b+1)^2 - b^2 - b\right)\left((b+1)^2 - b^2 + b\right) = (b+1)(3b+1)$$

   Un skaidrs, ka $(b + 1)(3b + 1) > 0$. Līdz ar to $c > 0$ ir naturāls skaitlis.

   Apskatot $c + b^2$ iegūstam $c + b^2 = \left(a^2 - b^2\right)^2 - b^2 + b^2 = \left(a^2 - b^2\right)^2$, kas ir naturāla skaitļa kvadrāts.

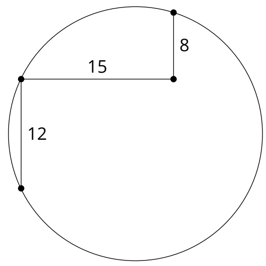
   Apskatot$c + a^2$ iegūstam $c + a^2 = \left(a^2 - b^2\right)^2 - b^2 + a^2 = \left(a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 + 1\right)$.

   Pierādīsim, ka neeksistē naturāls skaitlis n tāds, ka $n(n + 1)$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. Pieņemsim, ka ir tāds n. Tad, tā kā n un $n + 1$ ir savstarpēji pirmskaitļi, tad lai to reizinājums būtu kvadrāts, katram no tiem ir jābūt kvadrātam. Tātad $n = x^2$, $n + 1 = y^2$ ir divi pēc kārtas sekojoši naturālu skaitļu kvadrāti. Bet tas nav iespējams, jo tad $1 = y^2 - x^2 = (x - y)(x + y)$ nozīmē, ka $x - y = 1$ un $x + y = 1$, bet tad $x = 0$, kas nav naturāls skaitlis. Līdz ar to tādu naturālu skaitļu nav.

Līdz ar to $c+a^2=(a^2-b^2)(a^2-b^2+1)$ nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.

Tātad tikai viens no skaitļiem $c+a^2$, $c+b^2$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. Tā kā a, b bija patvaļīgi, tad jebkuriem a, b eksistē tāds c, ka tikai viens no $c+a^2$, $c+b^2$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. $\triangle$.

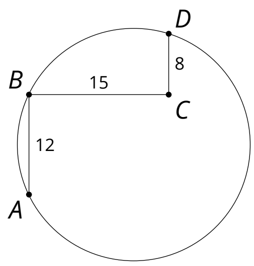
11. Noteikt 5. zīmējumā dotās riņķa līnijas rādiusu!



5. zīm.

Risinājums: Piebilde: 5. zīmējumā tika pieņemts, ka dotie nogriežņi ir savstarpēji perpendikulāri, tomēr tas netika pietiekami atspoguļots nedz formulējumā nedz zīmējumā. Tika pieņemti gan risinājumi, kas pieņēma, ka leņķi ir taisni, gan risinājumi, kas pieņēma, ka tie nav taisni.

Risinājums, ja leņķi tiek pieņemti par taisniem:



6. zīm.

Atliksim punktu E tādu, ka $ABCE$ ir taisnstūris. Iegūstam, ka $AE=BC=15$ un $CE=AB=12$. Tā kā $\angle DCB=\angle ECB=90^\circ$, tad D, C, B atrodas uz vienas taisnes, līdz ar to $DE=DC+CE=20$. Pēc Pitagora teorēmas trijstūrī ADE iegūstam, ka $AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=25$. Līdzīgi trijstūrī BCD, $DB=\sqrt{AC^2+CD^2}=17$.

Pagarināsim nogriezni BC līdz tā krustpunktam ar riņķa līniju F. Tā kā $\angle ABF=90^\circ$, tad AF ir riņķa līnijas diametrs, turklāt $\angle ABF=\angle ADF$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu loku. Bet tad $\angle ADF=90^\circ=\angle BCD$, un $\angle DBF=\angle DAF$ kā leņķi, kas balstās uz vienu loku. Līdz ar to secinām, ka DBC līdzīgs FAD. Līdz ar to $dfracAFAD=\frac{BD}{BC}$, tātad $AF=\frac{AD\cdot DB}{BC}=\frac{25\cdot 17}{15}=\frac{85}{3}=28\frac{1}{3}$. Bet AF ir diametrs, līdz ar to rādius is $14\frac{1}{6}$.

Atrisinājums, ja leņķi ir patvaļīgi:

Ievērosim, ka lai garākais nogrieznis atrastos iekš riņķa līnijas, tās diametram jābūt vismaz 15. Dotos nogriežņus patiešām iespējams ievietot riņķa līnijā kuras rādiuss ir $\dfrac{15}{2}=7,5$. No otras puses, jebkura riņķa līnija ar lielāku rādiusu arī ir iespējama: Ievietojam nogriežņus $15, 8$, tā kā to bija iespējams izdarīt riņķa līnijā ar rādiusu 7.5, tad to ir iespējams izdarīt arī jebkurā riņķa līnijā ar lielāku rādiusu. Atleik vien ievērot, ka nogriezni 8 vienmēr varēs pievienot šai konstrukcijai. Līdz ar to rādius var būt jebkurš skaitlis lielāks vai vienāds ar 7.5.

12. Cik dažādu vērtību var pieņemt izteiksme $\left\lfloor \dfrac{x^2}{1337} \right\rfloor$, ja $1\le x\le 1337$ un x ir reāls skaitlis?
Piebilde: $\lfloor x\rfloor$ ir lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x. Piemēram $\lfloor 2.2\rfloor=2$, $\lfloor \pi\rfloor=3$.

Risinājums: Ja $x=\sqrt{1337n}$, $n\in\mathbb{N}$, funkcija var pieņemt jebkādu vērtību n: $\left\lfloor \dfrac{(\sqrt{1337n})^2}{1337} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{1337n}{1337} \right\rfloor = \lfloor n\rfloor = n$. $1\le x\le 1337$, tātad funkcijas vērtības ir veselie skaitļi intervālā $[\left\lfloor \dfrac{1^2}{1337} \right\rfloor, \left\lfloor \dfrac{1337^2}{1337} \right\rfloor] = [\left\lfloor \dfrac{1}{1337} \right\rfloor, \lfloor 1337\rfloor] = [0, 1337]$, tātad izteiksme var pieņemt 1338 dažādas vērtības.

13. 7 komandas biedri ierodas uz olimpiādi un sparīgi risina uzdevumus. Pēc visu uzdevumu atrisināšanas skolēni paņem savus zīmuļus, bet izrādās, ka daži no biedriem ir paņēmuši cita rakstāmo.

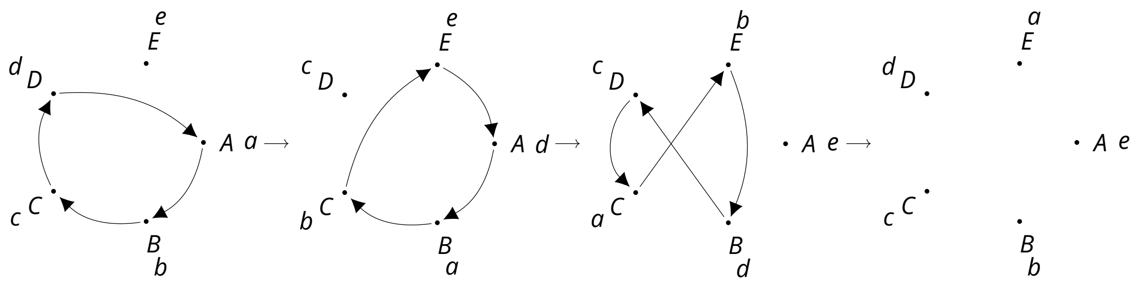
    Skolēni izdomāja metodi, kā apmainīties atpakaļ ar zīmuļiem: četri no skolēniem sastājas aplī un nodod savu zīmuli pa labi esošajam. Sauksim šo apmaiņu par "soli". Pēc katra soļa izpildes, aplī stāvošie četri skolēni drīkst mainīties ar vietām, kā arī pamest apli un savā vietā ielaist skolēnu, kas iepriekšējā solī nav bijis aplī. Pēc tam aplī esošie skolēni atkal veic zīmuļu padošanu pa apli, tādējādi veicot jaunu soli.

    Vai atkārtoti izpildot šīs darbības, visiem skolēniem ir iespējams atgūt savus zīmuļus?

    Risinājums: Ievērosim, ka, ja vairākas reizes atkārtojot doto operāciju varētu panākt, ka jebkuri divi skolēni varētu apmainīties ar rakstāmajiem nemainot citu skolēnu rokās esošos rakstāmos, tad būtu ļoti vienkārši visiem apmainīties atpakaļ.

    Proti, ja Andrim rokās ir Pētera rakstāmais, tad Andris varētu apmainīties ar Pēteri ar rakstāmajiem, un Pēterim rokās būtu viņa paša rakstāmais. Tā kā darbība papildu nemaina neviena cita rokās esošo rakstāmo, tad turpmāk izpildot darbību, Pētera rokās esošais rakstāmais nemainās. Tas nozīmē, ka mēs varētu ļoti vienkārši atkārtot darbību virkni - izvēlēties skolēnu ar nepareizo rakstāmo, izvēlēties skolēnu, kam rokās ir pirmā skolēna rakstāmais - un palielināt skolēnu, kam rokās ir pareizais rakstāmais skaitu vismaz par vienu. Līdz ar to vajadzētu ne vairāk kā septiņus šāda veida soļus, lai visi skolēni apmainītos atpakaļ ar rakstāmajiem.

    Izvēlēsimies piecus skolēnus - A, B, C, D, E- un pieņemsim, ka tiem rokās ir attiecīgi rakstāmie a, b, c, d, e. Atkārtosim četru skolēnu apmaiņas soli trīs reizes kā parādīts 7. zīmējumā, un panāksim, ka A un E ir apmainījušies ar rakstāmajiem, kamēr visi pārējie vēl aizvien tur savus sākotnējos rakstāmos:



7. zīm.

    Lai gan 3. rotācija neizskatās pēc tādas, to var pārveidot par apli, ja skolēni nomaina savu izvietojumu telpā. Ievērosim, ka šo trīs soļu rezultātā, A un E ir apmainījušies ar rakstāmajiem, savukārt visi pārējie skolēni ir palikuši ar tiem pašiem rakstāmajiem, ar kuriem sāka.

    Bet pēc augstākminētā, ja šāda veida apmaiņu iespējams izveidot no dotajiem soļiem, tad visiem noteikti iespējams apmainīties atpakaļ.

14. Izmantojot ciparus $1, 2, 3, 4, 5$ katru tieši vienu reizi, izveidot skaitli, kuram ir mazākais attālums līdz tā tuvākajam kvadrātam. Piemēram, ja izveido skaitli 14352, tā tuvākais kvadrāts ir $120^2 = 14400$, līdz ar to attālums ir 48.

    Risinājums: Ievēro, ka skaitļa ciparu summa būs 15, tā atlikums 6 (mod 9). No otras puses, naturāla skaitļa kvadrāts var dot tikai atlikumus $0, 1, 4, 7$ dalot ar 9, tāpēc attālums starp skaitli un tuvāko kvadrātu noteikti ir vismaz 1.

    Tālāk ir vairāki veidi, kā tikt pie tā, ka atšķirība tiešām ir 1. Zemāk dots viens no iespējamajiem veidiem tam, kā turpināt. Tas nebūt nav vienīgais pareizais risinājums.

    Turklāt, lai atšķirība tiešām būtu viens, tā kā $y = x^2 \pm 1$ dod atlikumu 6 dalot ar 9, tad tuvākā kvadrāta x^2 ciparu summai ir jābūt 7 vai 5, bet tikai 7 ir iespējama kvadrāta atlikuma dalot ar 9 vērtība, un tādēļ arī jāizpildās tam, ka mūsu skaitlis $y = x^2 - 1$. Tas nozīmē, ka x ciparu summa ir 4 vai 5, jo tie ir vienīgie skaitļi, kuru kvadrāti dalot ar 9 dod atlikumu 7.

Tālāk ievēro, ka mazākais y ir 12345 un $111^2 = 12321$, lielākais skaitlis ir 54321 un $234^2 = 54756$. Līdz ar to $111 < x < 234$. Meklētā skaitļa ciparu summa ir 4 vai 5 (ir tieši 14 kandidāti).

Kvadrāti var beigties tikai ar $0, 1, 4, 9, 6, 5$, tātad $y = x^2 - 1$ beigsies ar $9, 0, 3, 8, 5$ vai 4. Skaitlī y ir tikai cipari $1, 2, 3, 4$ un 5, tātad der tikai $3, 4, 5$, līdz ar to x beigsies ar $2, 4, 5, 6$ vai 8.

Tā kā ciparu summa ir 4 vai 5, tad skaitlis var beigties tikai ar 2 vai 4. Līdz ar to ir tikai 3 iespējami varianti robežās no 111 līdz 234: $112, 122, 212$.

Tālāk veicot pārbaudi redzam, ka $112 \cdot 112 = 12544 = 12543 + 1$, līdz ar to mazākais attālums patiešām ir 1 un meklētais skaitlis ir 12543.

15. Atrast mazāko naturālo skaitli n, lai būtu iespējams pilnībā noklāt patvaļīgu šaurleņķu trijstūri izmantojot ne vairāk kā n vienādsānu trijstūrus!

Risinājums: Pierādīsim, ka jebkuru šaurleņķa trijstūri ABC var pilnībā noklāt izmantojot 3 vienādsānu trijstūrus. Ievērosim, ka ABC apvilktās riņķa līnijas centrs O atrodas trijstūra iekšpuše, jo ABC ir šaurleņķu. Līdz ar to trijstūri $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CAO$ visi atrodas trijstūra ABC iekšpusē, un pilnībā to sadala. No otras puses $AO = BO = CO = R$, jo O ir apcentrs. Tātad $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CAO$ visi ir vienādsānu.

Pieņemsim, ka divi vienādsānu trijstūri sadala ABC. Tad noteikti eksistē punkts D tāds, ka AD, BD vai CD ir dalījuma līnija. Pieņemsim, nezuadējot vispārīnu, ka AD ir dalījuma līnija, tad ABD un ACD ir vienādsānu trijstūri. Šķirosim gadījumus pēc ABD un ACD virsotnes leņķa pozīcijas:

i) Ja $\angle ADB = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle ADC = 180° - \angle ADB = 180° - \alpha$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle ABD = \angle DAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$ un $\angle DAC = \angle DCA = \frac{\alpha}{2}$. Bet tad $\angle BAC = 90°$.

ii) $\angle ADB = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle DCA$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle ABD = \angle DAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$, un $\angle ADC = \angle DAC = 180° - \alpha$. Bet tad $\angle BAC = 270° - \frac{3\alpha}{2} = 3\angle ABC$. Tātad šajā gadījumā $\angle BAC = 3\angle ABC$.

iii) $\angle ADB = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle DAC$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle ABD = \angle DAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$, un $\angle ADC = \angle DCA = 180° - \alpha$. Bet tad $\angle ACB = 180 - \alpha = 2\angle ABC$. Tātad šajā gadījumā $\angle ACB = 2\angle ABC$.

iv) $\angle ABD = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle DCA$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle BDA = \angle DAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$, un $\angle ADC = \angle DAC = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Bet tad $\angle BAC = 180°$, pretruna.

v) $\angle ABD = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle DAC$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle BDA = \angle DAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$, un $\angle ADC = \angle DCA = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Bet tad $\angle DAC = 180° - 2 \cdot \angle ADC = -\alpha$, pretruna.

vi) $\angle BAD = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle DAC$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle BDA = \angle ABD = 90° - \frac{\alpha}{2}$, un $\angle ADC = \angle DCA = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Bet tad $\angle DAC = 180° - 2 \cdot \angle ADC = -\alpha$, pretruna.

Tie ir visi iespējamie gadījumi (pārējie ir simetriski). Ievērosim, ka esksitē trijstūris ar leņķiem $25°, 35°, 30°$, un tam neizpildās neviena no gadījumos aprakstītajām īpašībām ($\angle BAC = 90°$, $\angle ACB = 2\angle ABC$,$\angle BAC = 3\angle ABC$) neatkarīgi to tā kur atrodas dalījuma līnija.