atvērtā kopa 2018

Komandu olimpiāde matemātikā
Atrisinājumi 11. klasei

1. Izpildās vienādība

$$2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot \ldots \cdot 2018^{2018} \cdot 2018^{2018} = 2018^{2018^{2018}}$$

Cik reižu skaitlis 2018 parādās vienādības kreisajā pusē?

Risinājums: Ar n apzīmēsim cik daudz reižu skaitlis 2018^{2018} parādās vienādības kreisajā pusē. Ievērosim, ka reizināt skaitli ar sevi n reizes nozīmē kāpināt skaitli pakāpē n, tātad

$$\underbrace{2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot \ldots \cdot 2018^{2018}}_{n \text{ reizes}} = \left(2018^{2018}\right)^n$$

Uzdevumā dotā vienādība pārtop par

$$\begin{aligned} \left(2018^{2018}\right)^n &= 2018^{2018^{2018}} && \text{Izmantojam pakāpju īpašības} \\ 2018^{2018 \cdot n} &= 2018^{2018^{2018}} && \text{Pielīdzinām kāpinātājus} \\ 2018 \cdot n &= 2018^{2018} && \text{Dalām abas puses ar 2018} \\ n &= 2018^{2017} \end{aligned}$$

Līdz ar to redzam, ka 2018^{2018} vienādības kreisajā pusē parādās 2018^{2017} reizes. Atliek vien ievērot, ka 2018^{2018} satur divus 2018, līdz ar to skaitlis 2018 vienādības kreisajā pusē parādās $2 \cdot 2018^{2017}$ reizes.

2. Uz galda stāv trīs dažādas cepures: zaļa, dzeltena un sarkana. Reinis, Elīza un Toms katrs uzvelk vienu no cepurēm. Zināms, ka izpildās tieši viens sekojošajiem apgalvojumiem:

   (a) Reinim galvā ir zaļa cepure

   (b) Elīzai galvā nav zaļa cepure

   (c) Tomam galvā nav sarkana cepure

   Vai zinot šo informāciju iespējams noteikt kādas krāsas cepure ir galvā katram cilvēkam?

   Risinājums: Jā, veicot pārlasi var noskaidrot, ka vienīgais iespējamais patiesais apgalvojums ir c). Tādā gadījumā zaļā cepure ir Elīzai, dzeltenā ir Tomam un sarkanā Reinim.

3. Zināms, ka x un y ir naturāli skaitļi. Dalot skaitli x ar y, rodas atlikums 24, bet dalot $2x$ ar y, atlikums ir 11. Noteikt y vērtību!

   Risinājums: No dotā $x = ny + 24, 2x = my + 11$ $(m, n \in \mathbb{N})$. $2x = 2(ny + 24) = 2ny + 48$.

$$\begin{cases} 2x = my + 11 \\ 2x = 2ny + 48 \end{cases}$$

$$my + 11 = 2ny + 48$$

$$y(m - 2n) = 37$$

Skaitļa 37 vienīgie dalītāji ir 1 un 37. $m - 2n$ un y ir naturāli skaitļi, tādēļ $y = 37$ vai $y = 1$. $y = 1$ neder, jo dalot ar 1 nevar iegūt atlikumu 24. Tātad $y = 37$.

4. Dots trijstūris ABC. Uz malas AB atlikts nogrieznis FN tāds, ka $AF = FN = NB$. Uz malas CB atlikts punkts E tāds, ka $FE \parallel AC$. H ir FE viduspunkts. Ja $FE = EB$, pierādīt, ka četrstūris $HNEC$ ir paralelograms.

   Risinājums:

   1) Punktus F un N uz nogriežņa AB var atlikt tikai secībā A, F, N, B, citādi F un N sakrīt, kas ir pretrunā ar to, ka FN ir nogrieznis.
   2) $FE \parallel AC$ un $AF = \frac{1}{3}AB \implies CE = \frac{1}{3}CB$, $EB = \frac{2}{3}CB$.
   3) H - FE viduspunkts un N - FB viduspunkts, tātad NH ir $\triangle EFB$ viduslīnija. No tā seko, ka $NH \parallel EB$ un $NH = \frac{1}{2}EB$.
   4) $NH = \frac{1}{2}EB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}CB = \frac{1}{3}CB$
   5) $NH \parallel EB$ (c), tātad arī $NH \parallel CE$. $CE = \frac{1}{3}CB$ (b) un $NH = \frac{1}{3}CB$ (d). No paralelograma pazīmes seko, ka $HNEC$ ir paralelograms.

5. Pa apli sarakstīti vairāki pozitīvi skaitļi tā, ka katrs skaitlis ir vienāds ar kvadrātsakni no abu blakusesošo skaitļu reizinājuma. Atrast visu uzrakstīto skaitļu reizinājumu, ja zināms, ka viens no skaitļiem aplī ir 1.

   Risinājums: Vispirms ievērosim, ka ja $0 < a < b$, tad $a^2 < ab < b^2$, līdz ar to arī $a < \sqrt{ab} < b$. Tātad jebkurš skaitlis virknē ir ne lielāks kā lielākais no abiem blakusesošajiem skaitļiem.

   Apskatam lielāko skaitli, kas ierakstīts aplī (ja tādi aplī ir vairāki, izvēlamies vienu no tiem). Lielākais skaitlis noteikti ir ne lielāks, kā tam blakus esošie skaitļi. Tātad abi blakusesošie skaitļi ir vienādi ar lielāko skaitli, jo ja tie būtu lielāki, tā būtu pretruna. Atkārtoti pielietojot iepriekšējo spriedumu iegūstam, ka visi aplī ierakstītie skaitļi ir vienādi ar lielāko aplī ierakstīto skaitli.

   Tā kā visi skaitļi ir vienādi, un skaitlis 1 parādās aplī, tad visi skaitļi vienādi ar 1. Tātad visu skaitļu reizinājums aplī ir $1^n = 1$.

6. Telpā guļ 42 skolēni. Viņus uzmodina pavārs, kurš tikko ieskrējis telpā. Viņš visiem paziņo, ka vismaz viens no klātesošajiem vakar ir aizticis viņa spageti makaronus, jo viņš redzot vismaz vienu cilvēku, kura seja ir netīra ar spageti mērci. Neviens skolēns gan neatceras iepriekšējās dienas notikumus. Viņi redz visu pārējo sejas, bet ne savējo. Pavārs paziņo, ka ritmiski sitīs ar karoti pa katlu, līdz katrs, kurš zina, ka viņam uz sejas ir mērce, būs piecēlies kājās. Pēc katra sitiena katram skolēnam ir iespēja piecelties kājās. Kad pavārs sāk sitienus, skolēni klusējot skatās apkārt un redz, ka neviens neceļas kājās, bet pēc tieši 13 sitieniem kājās pēkšņi pieceļas vairāki skolēni. Cik skolēni piecēlās kājās?
   Piebilde: Šajā skolā ir vispārzināms, ka pavārs nespēj melot un tas, ka ka visi skolēni ir perfekti loģiski domājoši un patiešām celsies kājās, ja zinās to, ka viņiem uz sejas ir spageti mērce. Skolēni savā starpā nevar nekā komunicēt.

   Risinājums: Ar matemātiskās indukcijas metodi pierādīsim, ka n cilvēki ar netīru seju pieceļas pēc n sitieniem.

   Indukcijas bāze: Ja tikai vienam skolēnam būtu netīra seja, tad pēc pirmā sitiena viņš pieceltos kājās, zinot, ka vismaz vienam skolēnam ir netīra seja.

   Induktīvais pieņēmums: pieņemsim, ka k cilvēki pieceļas kājās pēc k sitieniem. Induktīvā pāreja: Ja $k+1$ cilvēkiem ir netīras sejas, tad pēc $k+1$ sitieniem katrs no viņiem to sapratīs, jo citādi pēc induktīvā pieņēmuma katram no viņiem redzamie redzamie k cilvēki ar netīrajām jau būtu piecēlušiem pēc k sitieniem. Tā kā pēc k sitieniem neviens nepiecēlās, tad zināms, ka bez pārējiem k cilvēkiem ir vēl viens ar netīru seju - tātad, viņš pats.

   Secinām, ka pēc 13 sitieniem kājās piecelsies 13 skolēni.

7. Atrast visus veselos atrisinājumus vienādojumam $x^4 = y^4 - 65$

Risinājums:

$$x^4 = y^4 - 65$$
$$y^4 - x^4 = 65$$
$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) = 13 \cdot 5 = 65 \cdot 1$$

Ievērosim, ka $y^2 - x^2 \leq y^2 + x^2$, tādēļ vai nu $y^2 - x^2 = 1$ un $y^2 + x^2 = 65$ vai $y^2 - x^2 = 5$ un $y^2 + x^2 = 13$.

Ja $y^2 - x^2 = (y - x)(x + y) = 1$, tad $y - x = x + y = 1$, jo $y > x$ nozīmē, ka $y - x$ ir pozitīvs. Bet tad $2y = (y - x) + (y + x) = 2 \Rightarrow y = 1$, līdzīgi, $x = 0$. Skaidrs, ka tad $x^2 + y^2 = 1 \neq 65$, tātad vienādojumam nav atrisinājumu.

Apskatam otru gadījumu:

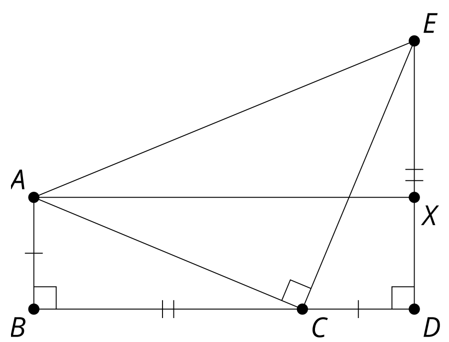
$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ y^2 + x^2 = 13 \end{cases} \qquad \text{Saskaitām abus vienādojumus}$$

$$2y^2 = 18$$
$$y^2 = 9$$
$$y = \pm 3$$
$$x = \pm 2$$

Tātad vienādojumam ir 4 veseli atrisinājumi: $(2; 3), (2; -3), (-2; 3), (-2; -3)$.

8. Taisnleņķa trijstūra ABC hipotenūza ir AC. Pierādīt, ka $AB + BC \leq \sqrt{2}AC$.

Risinājums:



1. zīm.

Uz malas BC pagarinājuma atliksim punktu D tā, ka $CD = AB$. No punkta D konstruēsim perpendikulu pret malu CD. Uz perpendikula atliksim punktu E tā, ka $ED = BC$ un ka E atrodas tajā pašā pusē taisnei BD kā punkts A.

Tā kā $AB = CD$, $\angle ABC = \angle CDE$, $BC = DE$, tad $\triangle ABS = \triangle CDE (mlm)$. Bet tas nozīmē, ka $AC = CE$, papildu, $\angle ACE = 180^\circ - \angle ACB - \angle ECD = 90^\circ$, līdz ar to varam aprēķināt $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = AC\sqrt{2}$ pēc Pitagora teorēmas.

Atliek vien ievērot, ka, ja mēs konstruējam perpendikulu AX no A pret malu DE, tad $ABDX$ ir taisnstūris un līdz ar to $AX = BD = BC + CD = AB + BC$. Bet no trijstūra nevienādības trijstūrī AEX izriet, ka

$$AB + BC = AX \leq AE - EX \leq AE = \sqrt{2}AC$$

Kas arī bija jāpierāda.

9. Katru naturālo skaitli nokrāsosim sarkanu, violetu, zilu vai dzeltenu tā, ka katru violeto skaitli var izteikt kā sarkana un zila skaitļa summu un katra sarkanā un zilā skaitļa summa ir violeta. Vai iespējams, ka katru krāsu esam izmantojuši bezgalīgi daudz reižu?

   Risinājums: Nokrāsosim visus naturālus skaitļus n, kas izsakāmi kā $n = 4k$ kaut kādam naturālam k dzeltenus, visus skaitļus formā $n = 4k - 3$ zilus, visus skaitļus formā $n = 4k - 2$ sarkanus un visus skaitļus formā $n = 4k - 1$ violetus.

   Katrs naturāls skaitlis noteikti ietilpst vienā (un tikai vienā) no augstākminētajām kategorijām, tātad neesam nokrāsojuši nevienu skaitli vairāk kā vienā krāsā. Turklāt katra krāsa tiks izmantota bezgalīgi daudz, jo k var būt jebkurš naturāls skaitlis.

   Visbeidzot, katru violeto skaitli $n = 4k - 1$ var izteikt kā $n = (4k - 2) + 1$, kur $1 = 4 - 3$ ir zils un $4k - 2$ ir sarkans. No otras puses, ja $n = 4k - 2$ ir sarkans un $m = 4k - 3$ ir zils, tad $n + m = 8k - 5 = 4(2k - 1) - 1$ ir violets. Tātad dotais krāsojums strādā.

10. 7 komandas biedri ierodas uz olimpiādi un sparīgi risina uzdevumus. Pēc visu uzdevumu atrisināšanas skolēni paņem savus zīmuļus, bet izrādās, ka daži no biedriem ir paņēmuši cita rakstāmo.

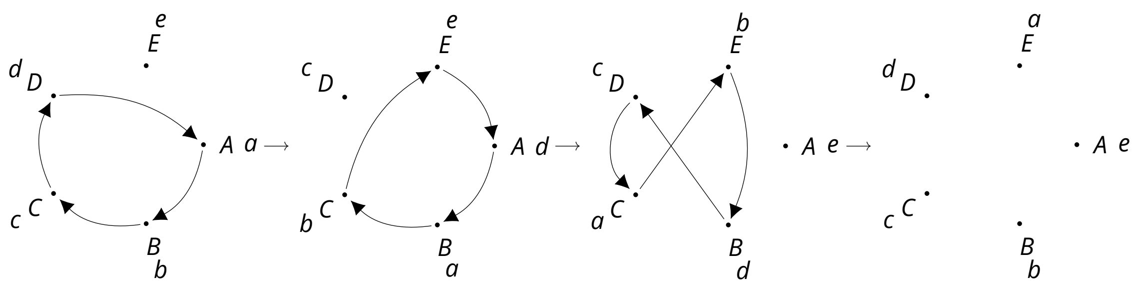
    Skolēni izdomāja metodi, kā apmainīties atpakaļ ar zīmuļiem: četri no skolēniem sastājas aplī un nodod savu zīmuli pa labi esošajam. Sauksim šo apmaiņu par "soli". Pēc katra soļa izpildes, aplī stāvošie četri skolēni drīkst mainīties ar vietām, kā arī pamest apli un savā vietā ielaist skolēnu, kas iepriekšējā solī nav bijis aplī. Pēc tam aplī esošie skolēni atkal veic zīmuļu padošanu pa apli, tādējādi veicot jaunu soli.

    Vai atkārtoti izpildot šīs darbības, visiem skolēniem ir iespējams atgūt savus zīmuļus?

    Risinājums: Ievērosim, ka, ja vairākas reizes atkārtojot doto operāciju varētu panākt, ka jebkuri divi skolēni varētu apmainīties ar rakstāmajiem nemainot citu skolēnu rokās esošos rakstāmos, tad būtu ļoti vienkārši visiem apmainīties atpakaļ.

    Proti, ja Andrim rokās ir Pētera rakstāmais, tad Andris varētu apmainīties ar Pēteri ar rakstāmajiem, un Pēterim rokās būtu viņa paša rakstāmais. Tā kā darbība papildu nemaina neviena cita rokās esošo rakstāmo, tad turpmāk izpildot darbību, Pētera rokās esošais rakstāmais nemainās. Tas nozīmē, ka mēs varētu ļoti vienkārši atkārtot darbību virkni - izvēlēties skolēnu ar nepareizo rakstāmo, izvēlēties skolēnu, kam rokās ir pirmā skolēna rakstāmais - un palielināt skolēnu, kam rokās ir pareizais rakstāmais skaitu vismaz par vienu. Līdz ar to vajadzētu ne vairāk kā septiņus šāda veida soļus, lai visi skolēni apmainītos atpakaļ ar rakstāmajiem.

    Izvēlēsimies piecus skolēnus - A, B, C, D, E- un pieņemsim, ka tiem rokās ir attiecīgi rakstāmie a, b, c, d, e. Atkārtosim četru skolēnu apmaiņas soli trīs reizes kā parādīts 2. zīmējumā, un panāksim, ka A un E ir apmainījušies ar rakstāmajiem, kamēr visi pārējie vēl aizvien tur savus sākotnējos rakstāmos:



2. zīm.

    Lai gan 3. rotācija neizskatās pēc tādas, to var pārveidot par apli, ja skolēni nomaina savu izvietojumu telpā. Ievērosim, ka šo trīs soļu rezultātā, A un E ir apmainījušies ar rakstāmajiem, savukārt visi pārējie skolēni ir palikuši ar tiem pašiem rakstāmajiem, ar kuriem sāka.

    Bet pēc augstākminētā, ja šāda veida apmaiņu iespējams izveidot no dotajiem soļiem, tad visiem noteikti iespējams apmainīties atpakaļ.

11. Izmantojot ciparus $1, 2, 3, 4, 5$ katru tieši vienu reizi, izveidot skaitli, kuram ir mazākais attālums līdz tā tuvākajam kvadrātam. Piemēram, ja izveido skaitli 14352, tā tuvākais kvadrāts ir $120^2 = 14400$, līdz ar to attālums ir 48.

    Risinājums: Ievēro, ka skaitļa ciparu summa būs 15, tā atlikums 6 (mod 9). No otras puses, naturāla skaitļa kvadrāts var dot tikai atlikumus $0, 1, 4, 7$ dalot ar 9, tāpēc attālums starp skaitli un tuvāko kvadrātu noteikti ir vismaz 1.

    Tālāk ir vairāki veidi, kā tikt pie tā, ka atšķirība tiešām ir 1. Zemāk dots viens no iespējamajiem veidiem tam, kā turpināt. Tas nebūt nav vienīgais pareizais risinājums.

    Turklāt, lai atšķirība tiešām būtu viens, tā kā $y = x^2 \pm 1$ dod atlikumu 6 dalot ar 9, tad tuvākā kvadrāta x^2 ciparu summai ir jābūt 7 vai 5, bet tikai 7 ir iespējama kvadrāta atlikuma dalot ar 9 vērtība, un tādēļ arī jāizpildās tam, ka mūsu skaitlis $y = x^2 - 1$. Tas nozīmē, ka x ciparu summa ir 4 vai 5, jo tie ir vienīgie skaitļi, kuru kvadrāti dalot ar 9 dod atlikumu 7.

    Tālāk ievēro, ka mazākais y ir 12345 un $111^2 = 12321$, lielākais skaitlis ir 54321 un $234^2 = 54756$. Līdz ar to $111 < x < 234$. Meklētā skaitļa ciparu summa ir 4 vai 5 (ir tieši 14 kandidāti).

    Kvadrāti var beigties tikai ar $0, 1, 4, 9, 6, 5$, tātad $y = x^2 - 1$ beigsies ar $9, 0, 3, 8, 5$ vai 4. Skaitlī y ir tikai cipari $1, 2, 3, 4$ un 5, tātad der tikai $3, 4, 5$, līdz ar to x beigsies ar $2, 4, 5, 6$ vai 8.

    Tā kā ciparu summa ir 4 vai 5, tad skaitlis var beigties tikai ar 2 vai 4. Līdz ar to ir tikai 3 iespējami varianti robežās no 111 līdz 234: $112, 122, 212$.

    Tālāk veicot pārbaudi redzam, ka $112 \cdot 112 = 12544 = 12543 + 1$, līdz ar to mazākais attālums patiešām ir 1 un meklētais skaitlis ir 12543.

12. Atrast mazāko naturālo skaitli n, lai būtu iespējams pilnībā noklāt patvaļīgu šaurleņķu trijstūri izmantojot ne vairāk kā n vienādsānu trijstūrus!

    Risinājums: Pierādīsim, ka jebkuru šaurleņķa trijstūri ABC var pilnībā noklāt izmantojot 3 vienādsānu trijstūrus. Ievērosim, ka ABC apvilktās riņķa līnijas centrs O atrodas trijstūra iekšpuše, jo ABC ir šaurleņķu. Līdz ar to trijstūri $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CAO$ visi atrodas trijstūra ABC iekšpusē, un pilnībā to sadala. No otras puses $AO = BO = CO = R$, jo O ir apcentrs. Tātad $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CAO$ visi ir vienādsānu.

    Pieņemsim, ka divi vienādsānu trijstūri sadala ABC. Tad noteikti eksistē punkts D tāds, ka AD, BD vai CD ir dalījuma līnija. Pieņemsim, nezuadējot vispārīnu, ka AD ir dalījuma līnija, tad ABD un ACD ir vienādsānu trijstūri. Šķirosim gadījumus pēc ABD un ACD virsotnes leņķa pozīcijas:

    i) Ja $\angle ADB = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle ADC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \alpha$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle ABD = \angle DAB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ un $\angle DAC = \angle DCA = \frac{\alpha}{2}$. Bet tad $\angle BAC = 90^\circ$.

    ii) $\angle ADB = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle DCA$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle ABD = \angle DAB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, un $\angle ADC = \angle DAC = 180^\circ - \alpha$. Bet tad $\angle BAC = 270^\circ - \frac{3\alpha}{2} = 3\angle ABC$. Tātad šajā gadījumā $\angle BAC = 3\angle ABC$.

    iii) $\angle ADB = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle DAC$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle ABD = \angle DAB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, un $\angle ADC = \angle DCA = 180^\circ - \alpha$. Bet tad $\angle ACB = 180 - \alpha = 2\angle ABC$. Tātad šajā gadījumā $\angle ACB = 2\angle ABC$.

    iv) $\angle ABD = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle DCA$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle BDA = \angle DAB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, un $\angle ADC = \angle DAC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Bet tad $\angle BAC = 180^\circ$, pretruna.

    v) $\angle ABD = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle DAC$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle BDA = \angle DAB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, un $\angle ADC = \angle DCA = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Bet tad $\angle DAC = 180^\circ - 2 \cdot \angle ADC = -\alpha$, pretruna.

    vi) $\angle BAD = \alpha$ ir virsotnes leņķis un $\angle DAC$ ir virsotnes leņķis, tad $\angle BDA = \angle ABD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, un $\angle ADC = \angle DCA = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Bet tad $\angle DAC = 180^\circ - 2 \cdot \angle ADC = -\alpha$, pretruna.

    Tie ir visi iespējamie gadījumi (pārējie ir simetriski). Ievērosim, ka esksitē trijstūris ar leņķiem $25^\circ, 35^\circ, 30^\circ$, un tam neizpildās neviena no gadījumos aprakstītajām īpašībām ($\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = 2\angle ABC$,$\angle BAC = 3\angle ABC$) neatkarīgi to tā kur atrodas dalījuma līnija.

13. Pierādīt, ka jebkuru polinomu ar reāliem koeficientiem $p(x)$ var "sadalīt" divos polinomos $f(x)$ un $g(x)$, proti atrast tādus $f(x)$ un $g(x)$, ka $p(x) = f(x) + g(x)$, tā, lai izpildītos $f(1) = g(2) = 0$? Vai šis sadalījums ir vienīgais iespējamais?

    Risinājums: Apskatīsim $f(x) = p(2)(x-1) = p(2)x - p(2)$, tas ir pirmās pakāpes polinoms ar reāliem koeficientiem, turklāt $f(1) = f(2) \cdot 0 = 0$. Un $g(x) = p(x) - f(x) = p(x) - p(2)(x-1)$, tas ir polinoms kā divu polinomu starpība, un $g(2) = p(2) - p(2)(2-1) = 0$. Līdz ar to $g(2) = f(1) = 0$, un $g(x) + f(x) = p(x) - f(x) + f(x) = p(x)$, līdz ar to katram polinomam tiešām eksistē prasītais sadalījums.

    Ievērosim, ka tas nav unikāls, jo, piemēram der arī dalījums $f(x) = p(2)(x-1) + (x-1)(x-2)$ un $g(x) = p(x) - p(2)(x-1) - (x-1)(x-2)$.

14. Cik dažādos veidos var nokrāsot trijstūra piramīdas skaldnes, ja dotas n dažādas krāsas? Ja divi krāsojumi atšķiras tikai ar piramīdas rotāciju, tad uzskatīsim tos par vienādiem.

    Risinājums: Izvēlēties 4 krāsas ar atkārtojumiem no n krāsām var $\overline{C_n^4}$ veidos. Dažādas figūras ar vienādi izvēlētām krāsām rodas tikai tad, ja izvēlas tieši 4 dažādas krāsas, tad veidojas divi dažādi krāsojumi; $\overline{C_n^4}$ ieskaita tikai vienu no tiem. Lai pievienotu pārējos, jāpieskaita, cik veidos no n krāsām var izvēlēties tieši 4 krāsas - C_n^4.

    $\overline{C_n^4} + C_n^4 = \frac{(n+4-1)!}{4!(n-1)!} + \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{(n+3)!}{4!(n-1)!} + \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{1}{24}((n+3)(n+2)(n+1)n + n(n-1)(n-2)(n-3))$.

15. Vai eksistē naturāli skaitļi x, y, z, kam izpildās $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$, ja

    a) $k = 3$,

    b) $k = 2$?

    Risinājums:

    a) Jā, piemēram, $x = 1, y = 1, z = 2$.

    b) Pierādīsim, ka vienādojumam $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n xyz$ nav atrisinājumu nevienam naturālam n.

    Pieņemsim, ka eksistē kaut viens atrisinājums, tad noteikti eksistē arī "mazākais atrisinājums", proti atrisinājums x, y, z tāds, ka $x + y + z$ ir mazākā iespējamā starp visiem atrisinājumiem x, y, z.

    Ja visi skaitļi ir pāra, $x = 2a, y = 2b, z = 2c$, tad vienādojums pārtop par

    $$4(a^2 + b^2 + c^2) = 2^{n+3}abc$$
    $$a^2 + b^2 + c^2 = 2^{n+1}abc$$

    Esam atraduši mazāku atrisinājumu kādam $m = n + 1$, jo $a + b + c < \frac{x+y+z}{2}$. Tā ir pretruna.

    Līdz ar to vismaz viens no x, y, z ir nepāra. Ievērosim, ka visi skaitļi nevar būt nepāra, jo tad $x^2 + y^2 + z^2$ ir nepāra, bet $2^n xyz$ ir pāra. Tātad ar to tieši divi no x, y, z ir nepāra un viens ir pāra. Nezaudējot vispārību, pieņemsim, ka $x = 2a$. Tad $4a^2 + y^2 + z^2 = 2^{n+1}ayz$. Ievērosim, ka 2^{n+1} noteikti dalās ar 4, jo n ir naturāls. Tādēļ $4a^2 + y^2 + z^2$ arī jādalās ar 4. Tātad $x^2 + y^2$ jādalās ar 4, bet nav tādu nepāra skaitļu, kuru kvadrātu summa dalītos ar 4: $(2u-1)^2 + (2v-1)^2 = 4(u^2 + v^2) - 4(u + v) - 2$ nedalās ar 4 nevieniem u, v.