atvērtā kopa 2018

Komandu olimpiāde matemātikā
Atrisinājumi 7. klasei

1. Trīs draugi Anna, Baiba un Centis reizē sāk skaitīt līdz 100. Kad Anna pabeidza skaitīt, Baiba bija tikusi līdz 90. Kad Baiba pabeidza skaitīt, Centis bija ticis līdz 80. Kādu skaitli teica Centis, kad Anna beidza skaitīt, ja visi draugi skaita vienmērīgā tempā?

   Risinājums: Apzīmējam Annas skaitīšanas ātrumu ar x. Kad Anna pabeidza skaitīt, Baiba bija tikusi līdz 90, tātad Baibas skaitīšanas ātrums ir $0,9x$. Kad Baiba pabeidza skaitīt, Centis bija tikusi līdz 80, tātad Centa skaitīšanas ātrums ir $0,8(0,9x) = 0,72x$. Varam secināt, ka Centis bija ticis līdz 72.

2. Uz galda stāv trīs dažādas cepures: zaļa, dzeltena un sarkana. Reinis, Elīza un Toms katrs uzvelk vienu no cepurēm. Zināms, ka izpildās tieši viens sekojošajiem apgalvojumiem:

   (a) Reinim galvā ir zaļa cepure
   (b) Elīzai galvā nav zaļa cepure
   (c) Tomam galvā nav sarkana cepure

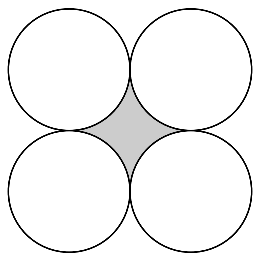
   Vai zinot šo informāciju iespējams noteikt kādas krāsas cepure ir galvā katram cilvēkam?

   Risinājums: Jā, veicot pārlasi var noskaidrot, ka vienīgais iespējamais patiesais apgalvojums ir c). Tādā gadījumā zaļā cepure ir Elīzai, dzeltenā ir Tomam un sarkanā Reinim.

3. Mikum ir 33 peonijas un 64 pienenes. Puķu tirgū pie viena tirgotāja par 7 pienenēm varēja iegūt 3 peonijas, bet otrs pārdevējs mainīja 2 peonijas pret 12 pienenēm. Vai atkārtoti mainot puķes šajā tirgū, Mikus var iegūt tieši 2018 puķes?

   Risinājums: No sākuma ir $33 + 64 = 97$ puķes - nepāra skaits. Apmaiņas tirgū maina puķu skaitu par $7 - 3 = 4$ vai $12 - 2 = 10$ puķēm - pāra skaitu. Tātad veicot apmaiņas var iegūt tikai nepāra skaitu puķu, bet 2018 ir pāra skaitlis.

4. Dotas 4 vienādas riņķa līnijas ar rādiusu 1 cm, kas pieskaras ārēji (1. zīm.). Noteikt iekrāsotās daļas laukumu, pieņemot, ka $\pi = 3$!
   Piebilde: Riņķa laukumu aprēķina pēc formulas: $S = \pi r^2$.



1. zīm.

   Risinājums: Savienojot visu četru r. l. centrus, iegūstam kvadrātu ar malas garumu 2 cm. Iekrāsotais laukums izsakāms kā kvadrāta laukums mīnuss četru ceturtdaļapļu laukums jeb kvadrāta laukums mīnus apļa laukums. Tātad iekrāsotais laukums ir $2 \cdot 2 - \pi \cdot 1^2 \approx 4 - 3 \approx 1$ (cm).

5. Votivapu valodā visi vārdi sastāv tikai no burtiem X, D un A, turklāt vārds nedrīkst sākties līdzskani vai beigties ar patskani. Cik dažādu vārdu pastāv Votivapu valodā, ja zināms, ka katrā vārdā ir vismaz viens burts un ne vairāk kā 70 burti? (X un D ir līdzskaņi, A - patskanis).

   Risinājums: Pierādīsim, ka jebkuru vārdu Votivapu valodā ir iespējams pārveidot par 70 burtus garu virkni, kas sastāv no burtiem X, D, A, sākas ar A un satur vismaz vienu līdzskani (šāda veida virknes sauksim par "labām virknēm") tieši vienā veidā un otrādāk.

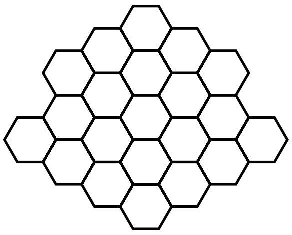
Konstrukcija ir sekojoša: sākot ar jebkuru vārdu Votivapu valodā, tam beigās pierakstīsim tam galā burtus *A* līdz tas ir 70 burtus garš. Ievērosim, ka virkne sākas ar patskani un ka šajā virknē noteikti ir vismaz viens līdzskanis, jo visi vārdi Votivapu valodā beidzas ar līdzskani un sākas ar patskani. Tātad šī virkne ir laba virkne.

No otras puses, ja mēs sākam ar jebkuru labu virkni, tad veids, kurā mēs iegūstam Votivapu valodas vārdu ir sekojošs: no virknes beigām izdzēšam visus patskaņus līdz uzduramies līdzskanim, mēs noteikti tātad uzdursimies, jo katra laba virkne satur vismaz vienu līdzskani. Šis vārds sākas ar patskani, jo katra laba virkne sākas ar patskani, un beidzas ar līdzskani jo visus patskaņus no virknes beigām esam izdzēsuši. Līdz ar to patiešām esam ieguvuši vārdu Votivapu valodā.

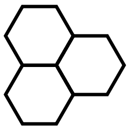
Ievērosim, ka abas metodes atgriež viena otru, proti ja sākam ar vārdu Votivapu valodā, iegūstam labu virkni izmantojot pirmo metodi un tad no šīs virknes iegūstam sākotnējo vārdu. Līdzīgi otrā virzienā.

Līdz ar to, iegūstam, ka Votivapu valodas vārdi ir tiešā atbilstībā ar labām virknēm, tātad Votivapu valodā ir tieši tikpat daudz vārdus, cik labu virkņu. Ievērosim, ka pirmo burtu varam izvēlēties 1 veidā, pārējos 69 burtus 3 veidos, līdz ar to ir $3^{6}9$ virkņu garumā 70, kas sākas ar patskani. Un ir tieši viena virkne, kura nesatur vismaz vienu līdzskani (virkne, kas sastāv no visiem patskaņiem), līdz ar to ir $3^{69}-1$ laba burtu virkne.

Līdz ar to Votivapu valodā ir $3^{69}-1$ vārds.



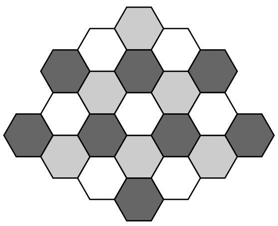
2. zīm.



3. zīm.

6. Vai 2. zīmējumā attēloto laukumu iespējams pilnībā noklāt izmantojot 3. zīmējumā attēlotās figūras (tās nedrīkst pārklāties)?

   Risinājums: Apskata krāsojumu, kā parādīts 4. zīmējumā:



4. zīm.

   Krāsojumā ir 7 balti, 6 gaiši pelēki un astoņi tumši pelēki laucini, bet katra figūra noklāj tieši vienu laucinu no katras krāsas. Tātad doto laukumu nav iespējams noklāt kā prasīts.

7. Pierādīt, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar sastāvēt tikai no divniekiem un nullēm! (Skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi).

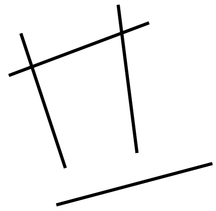
   Risinājums: No skaitļa kvadrāta beigām varam atmest pāra skaitu nuļļu nost, jo $100 = 10^2$. Pēc šīm darbībām skaitļa kvadrāts var beigties ar 20, 22 vai 02. Ja tas beidzas ar 20, skaitlis dalās ar 5, bet ne ar 25 - tātad nav kvadrāts. Ja tas beidzas ar 20 vai 22, tas dalās ar 2, bet ne ar 4, tātad arī nav kvadrāts.

8. Vai iespējams 4 nogriežņus izkārtot tā, ka katrs no tiem krustojas ar

   a) $1, 2, 2$ un 3 citiem nogriežņiem;

   b) $1, 2, 3$ un 3 citiem nogriežņiem?

   Gadījums, kur krustotos ar 0, 1, 1 un 2 nogriežņiem, parādās 5. zīmējumā.

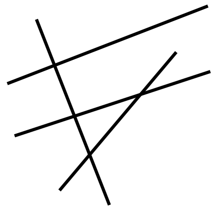


5. zīm.

   Risinājums:

   a) Var, piemēram kā parādīts 6. attēlā:

   b) Varam ievērot, ka nogriežņu krustošanās ir abpusēja, bet šeit kopējais krustošanās daudzums ir $1 + 2 + 3 + 3 = 9$ - nepāra skaitlis, tātad izkārtojums nav iespējams.



6. zīm.

9. Pa apli sarakstīti 210 skaitļi tā, ka katrs skaitlis ir abu blakusesošo skaitļu vidējais aritmētiskais. Kāda ir visu uzrakstīto skaitļu summa, ja zināms, ka viens no skaitļiem ir 2?

   Risinājums: Apskatam lielāko skaitli, kas ierakstīts aplī (ja tādi aplī ir vairāki, izvēlamies vienu no tiem). Lielākais skaitlis noteikti ir ne lielāks, kā tam blakus esošie skaitļi, jo tas ir abu blakusesošo skaitļu aritmētiskais vidējais. Tātad abi blakusesošie skaitļi ir vienādi ar lielāko skaitli, jo ja tie būtu lielāki, tā būtu pretruna. Atkārtoti pielietojot iepriekšējo spriedumu iegūstam, ka visi aplī ierakstītie skaitļi ir vienādi ar lielāko aplī ierakstīto skaitli.

   Tā kā visi skaitļi ir vienādi, un skaitlis 2 parādās aplī, tad visi skaitļi vienādi ar 2. Tātad skaitļu summa aplī ir $210 \cdot 2 = 420$.

10. Vairāki skolēni devās uz klases ekskursiju. Ekskursijas beigās katrs uz lapiņas uzrakstīja, ar cik cilvēkiem ekskursijas laikā bija parunājis. Zināms, ka runāšana ir abpusēja. Vai ir iespējams, ka

    a) uz visām lapiņām bija atšķirīgi skaitļi;

    b) ekskursijā bija 1337 skolēni un uz visām lapiņām bija nepāra skaitļi?

    Risinājums:

    a) Uzrakstītie skaitļi ir intervālā $[0; n-1]$ - iespējami n dažādi skaitļi, tātad uz lapiņām vajadzētu būt katram no šiem skaitļiem. Tomēr ja viens skolēns būs uzrakstījis uz lapiņas 0 (neparunāja ar nevienu), tad nevar būt lapiņa, uz kuras rakstīts $n-1$ (parunāja ar visiem izņemot sevi).

    b) Ir nepāra skaits skolēnu un nepāra skaits lapiņu, tātad uz visām lapiņām uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra. Tā ir pretruna, jo runāšana ir abpusēja.

11. Plakne nokrāsota 8 dažādās krāsās. Pierādi, ka uz tās var atrast divus vienas krāsas punktus, starp kuriem attālums centimetros ir vesels skaitlis!

    Risinājums: Izvēlamies 9 punktus uz vienas taisnes ar 1 cm intervāliem. Pēc dirihlē principa vismaz 2 no tiem būs vienā krāsā, kā arī attālums starp tiem centimetros būs vesels skaitlis.

12. Andis uz zemes atstāja taisnstūrveida saldējumu ar izmēriem 5cm$\times$9cm. Tomēr viņš bija prom ilgāk, nekā paredzēja un saldējums daļēji izkusa. Kad Andis atgriezās, izkusušā masa ap saldējumu veidoja peļķi, kuras ārējā mala bija 2 cm attālumā no saldējuma, iekšējā peļķes malas sakrita ar saldējuma kontūru. Noteikt izkusušā saldējuma peļķes laukumu.

    Risinājums: Peļķi var sadalīt četros taisnstūros: divos ar izmēriem 2×9 cm un divos ar izmēriem 2×5 cm. Atlikušie četri stūri kopā veido apli ar rādiusu 2 cm. Kopā laukums ir $2 \cdot 18 + 2 \cdot 10 + 2^2 \cdot \pi = 56 + 4\pi$ cm.

13. Dots trijstūris $\triangle ABC$. Zināms, ka trijstūra malām izpildās vienādība $AB^2 = BC^2 + CA^2$. Pierādīt, ka mala AB nevar būt īsāka kā $\frac{2}{5}$ trijstūra perimetra.

    Risinājums: Apzīmēsim trijstūra malu garumus ar $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Uzdevums prasa pierādīt nevienādību $\frac{2}{5}(a+b+c) < c$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}(a+b+c) &< c \quad \text{tā kā } c > 0 \text{ kā malas garums, dalām abas vienādojuma puses} \\
\frac{2}{5}\frac{(a+b+c)}{c} &< 1 \\
\frac{a+b+c}{c} &< \frac{5}{2} \\
\frac{a+b}{c} + 1 &< \frac{5}{2} \\
\frac{a+b}{c} &< \frac{3}{2} \\
2(a+b) &< 3c \quad \text{Abas nevienādības puses ir pozitīvas, tāpēc varam to kāpināt kvadrātā.} \\
4a^2 + 8ab + 4b^2 &< 9c^2 \quad \text{Aizvietojam } c^2 = a^2 + b^2 \text{ pēc dotā.} \\
4a^2 + 8ab + 4b^2 &< 9(a^2 + b^2) \\
0 &< 5a^2 - 8ab + 5b^2 \\
0 &< a^2 + 4(a-b)^2 + b^2
\end{aligned}$$

    Kvadrātu summa ir nenegatīva, turklāt $a^2+4(a-b)^2+b^2 = 0$ tad un tikai tad, ja $a = b = 0$, bet šāds trijstūris nav iespējams, tātad $a^2 + 4(a-b)^2 + b^2 > 0$. Tika veikti tikai ekviavalenti pārveidojumi, tātad prasītais ir pierādīts.

14. Seši astoņkāji izpilda deju. Vispirms nejaušs skaits astoņkāju sadodas rokās ar taustekļiem. Pēc tam tie atkārto sekojošu soli ik pa minūtei: visi astoņkāji, kas bija sadevušies rokās, atlaiž rokas, un visi tie, kas nebija sadevušies rokās, sadodas rokās. Pierādīt, ka kādā brīdī varēs atrast trīs astoņkājus, kuri ir sadevušies rokās katrs ar katru. Katram astoņkājim ir 8 taustekļi, un divi astoņkāji sadodas rokās tikai ar vienu taustekli katrs.

    Risinājums: Apskatam vienu astoņkāji, nosauksim to par A. Vai nu pirmajā vai otrajā solī tas būs sadevies rokās ar vismaz trīs citiem astoņkājiem - B, C un D. Ja B un C arī ir sadevušies rokās, tad A, B, C astoņkāji izpilda prasīto. Ja C un D ir sadevušies rokās, tad A, C, D izpilda prasīto. Ja B un D būs sadevušies, tad A, B, D izpildīsies. Ja ne B un C, ne B un D un ne C un D būs sadevušies ar taustekļiem, tad nākamajā solī tie sadosies un B, C, D izpildīs prasīto.

15. Zināms, ka x un y ir naturāli skaitļi. Dalot skaitli x ar y, rodas atlikums 24, bet dalot $2x$ ar y, atlikums ir 11. Noteikt y vērtību!

    Risinājums: No dotā $x = ny + 24, 2x = my + 11$ ($m, n \in \mathbb{N}$). $2x = 2(ny + 24) = 2ny + 48$.

$$\begin{cases} 2x = my + 11 \\ 2x = 2ny + 48 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
my + 11 &= 2ny + 48 \\
y(m - 2n) &= 37
\end{aligned}$$

    Skaitļa 37 vienīgie dalītāji ir 1 un 37. $m - 2n$ un y ir naturāli skaitļi, tādēļ $y = 37$ vai $y = 1$. $y = 1$ neder, jo dalot ar 1 nevar iegūt atlikumu 24. Tātad $y = 37$.