atvērtā kopa 2018

Komandu olimpiāde matemātikā
Atrisinājumi 8. klasei

1. Pierādīt, ka $x^6 - x^3 + 7 > 0$ visiem reāliem skaitļiem x!

   Risinājums: Var ievērot, ka $x^6 - x^3 + 7 = (x^3 - \frac{1}{2})^2 + 6\frac{3}{4}$. Kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs un $6\frac{3}{4}$ ir pozitīvs skaitlis.

2. Uz galda stāv trīs dažādas cepures: zaļa, dzeltena un sarkana. Reinis, Elīza un Toms katrs uzvelk vienu no cepurēm. Zināms, ka izpildās tieši viens sekojošajiem apgalvojumiem:

   (a) Reinim galvā ir zaļa cepure

   (b) Elīzai galvā nav zaļa cepure

   (c) Tomam galvā nav sarkana cepure

   Vai zinot šo informāciju iespējams noteikt kādas krāsas cepure ir galvā katram cilvēkam?

   Risinājums: Jā, veicot pārlasi var noskaidrot, ka vienīgais iespējamais patiesais apgalvojums ir c). Tādā gadījumā zaļā cepure ir Elīzai, dzeltenā ir Tomam un sarkanā Reinim.

3. Pierādīt, ka naturāla skaitļa kvadrāts nevar sastāvēt tikai no divniekiem un nullēm! (Skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi).

   Risinājums: No skaitļa kvadrāta beigām varam atmest pāra skaitu nuļļu nost, jo $100 = 10^2$. Pēc šīm darbībām skaitļa kvadrāts var beigties ar $20, 22$ vai 02. Ja tas beidzas ar 20, skaitlis dalās ar 5, bet ne ar 25 - tātad nav kvadrāts. Ja tas beidzas ar 20 vai 22, tas dalās ar 2, bet ne ar 4, tātad arī nav kvadrāts.

4. Izpildās vienādība

   $$2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot \ldots \cdot 2018^{2018} \cdot 2018^{2018} = 2018^{2018^{2018}}$$

   Cik reižu skaitlis 2018 parādās vienādības kreisajā pusē?

   Risinājums: Ar n apzīmēsim cik daudz reižu skaitlis 2018^{2018} parādās vienādības kreisajā pusē. Ievērosim, ka reizināt skaitli ar sevi n reizes nozīmē kāpināt skaitli pakāpē n, tātad

   $$\underbrace{2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot \ldots \cdot 2018^{2018}}_{n \text{ reizes}} = \left(2018^{2018}\right)^n$$

   Uzdevumā dotā vienādība pārtop par

   $$\begin{aligned} \left(2018^{2018}\right)^n &= 2018^{2018^{2018}} && \text{Izmantojam pakāpju īpašības} \\ 2018^{2018 \cdot n} &= 2018^{2018^{2018}} && \text{Pielīdzinām kāpinātājus} \\ 2018 \cdot n &= 2018^{2018} && \text{Dalām abas puses ar 2018} \\ n &= 2018^{2017} \end{aligned}$$

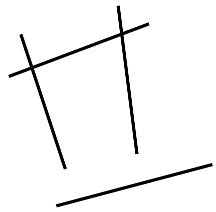
   Līdz ar to redzam, ka 2018^{2018} vienādības kreisajā pusē parādās 2018^{2017} reizes. Atliek vien ievērot, ka 2018^{2018} satur divus 2018, līdz ar to skaitlis 2018 vienādības kreisajā pusē parādās $2 \cdot 2018^{2017}$ reizes.

5. Vai iespējams 4 nogriežņus izkārtot tā, ka katrs no tiem krustojas ar

   a) $1, 2, 2$ un 3 citiem nogriežņiem;

   b) $1, 2, 3$ un 3 citiem nogriežņiem?

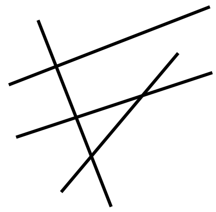
   Gadījums, kur krustotos ar 0, 1, 1 un 2 nogriežņiem, parādās 1. zīmējumā.



1. zīm.

   Risinājums:

   a) Var, piemēram kā parādīts 2. attēlā:



2. zīm.

   b) Varam ievērot, ka nogriežņu krustošanās ir abpusēja, bet šeit kopējais krustošanās daudzums ir $1 + 2 + 3 + 3 = 9$ - nepāra skaitlis, tātad izkārtojums nav iespējams.

6. Zināms, ka x un y ir naturāli skaitļi. Dalot skaitli x ar y, rodas atlikums 24, bet dalot $2x$ ar y, atlikums ir 11. Noteikt y vērtību!

   Risinājums: No dotā $x = ny + 24, 2x = my + 11$ $(m, n \in \mathbb{N})$. $2x = 2(ny + 24) = 2ny + 48$.

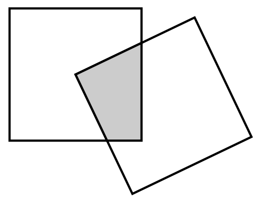
$$\begin{cases} 2x = my + 11 \\ 2x = 2ny + 48 \end{cases}$$

$$my + 11 = 2ny + 48$$

$$y(m - 2n) = 37$$

   Skaitļa 37 vienīgie dalītāji ir 1 un 37. $m - 2n$ un y ir naturāli skaitļi, tādēļ $y = 37$ vai $y = 1$. $y = 1$ neder, jo dalot ar 1 nevar iegūt atlikumu 24. Tātad $y = 37$.

7. Doti divi kvadrāti ar malas garumu 1. Noteikt iekrāsotās daļas laukumu, ja viena kvadrāta virsotne atrodas otra kvadrāta centrā, piemēram kā 3. zīmējumā.



3. zīm.

   Risinājums: Var ievērot, ka, rotējot kvadrātu, kura virsotne ir otra kvadrāta centrā, ap otra kvadrāta centra punktu, laukums nemainās. Tad šo kvadrātu var aizrotēt tā, ka kvadrātu malas, kas krustojas, ir perpendikulāras. Tad viegli pamanāms, ka iekrāsotais laukums ir $\frac{1}{4}$.

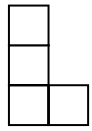
   Alternatīvi no centra var novilkt augstumus pret malām un iegūt divus vienādus trijstūrus.

8. Pa apli sarakstīti 210 skaitļi tā, ka katrs skaitlis ir abu blakusesošo skaitļu vidējais aritmētiskais. Kāda ir visu uzrakstīto skaitļu summa, ja zināms, ka viens no skaitļiem ir 2?

   Risinājums: Apskatam lielāko skaitli, kas ierakstīts aplī (ja tādi aplī ir vairāki, izvēlamies vienu no tiem). Lielākais skaitlis noteikti ir ne lielāks, kā tam blakus esošie skaitļi, jo tas ir abu blakusesošo skaitļu aritmētiskais vidējais. Tātad abi blakusesošie skaitļi ir vienādi ar lielāko skaitli, jo ja tie būtu lielāki, tā būtu pretruna. Atkārtoti pielietojot iepriekšējo spriedumu iegūstam, ka visi aplī ierakstītie skaitļi ir vienādi ar lielāko aplī ierakstīto skaitli.

   Tā kā visi skaitļi ir vienādi, un skaitlis 2 parādās aplī, tad visi skaitļi vienādi ar 2. Tātad skaitļu summa aplī ir $210 \cdot 2 = 420$.

9. Dots, ka $m \times n$ rūtiņu laukums ir pilnībā noklāts ar L veida tetramino figūrām (4. zīm.), kuras nepārklājas. Pierādīt, ka šīs figūras ir pāra skaitā.



4. zīm.

Risinājums: L veida figūra aizņem 4 rūtiņas, tāpēc zināms, ka rūtiņu laukums dalās ar 4. Pieņemam, ka kolonnas ir pāra skaitā, un katru otro kolonnu nokrāsojam melnu. Baltās un melnās rūtiņas ir vienā skaitā, jo kolonnu skaits ir pāra. Lai kā novietotu L figūru uz iekrāsotā laukuma, tā aizņem 3 baltas vai 3 melnas rūtiņas, bet, lai noklātu rūtiņu laukumu, baltajām un melnajām rūtiņām jābūt vienā skaitā. Tātad L figūrām jābūt pāra skaitā.

10. Vai iespējams, ka

a) $a + b = 962$ un $a \cdot b$ dalās ar 962;

b) $a + b + c = 962$ un $a \cdot b \cdot c$ dalās ar 962,

Ja a, b un c ir naturāli skaitļi?

Risinājums:

a) $a + b = 962$, tātad $a = 962 - b$. Tad $a \cdot b = (962 - b) \cdot b = 962b - b^2$, kam jādalās ar 962. Lai b^2 dalītos ar 962, arī b jādalās ar 962, jo $962 = 2 \cdot 13 \cdot 37$, jeb $b = 962 \cdot n$, kur $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Bet tad $a + b = a + 962n > 962$. Pretruna, tātad nav iespējams.

b) Ievērojam, ka $962 = 2 \cdot 13 \cdot 37$; Tad var izveidot, piemēram, šādu risinājumu: $a = 912, b = 13, c = 37$.

$a + b + c = 962$.

$a \cdot b \cdot c = 912 \cdot 13 \cdot 37 = 456 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 37 = 456 \cdot 962$, tātad dalās ar 962.

11. $ABCD$ ir kvadrāts ar malas garumu 1. T, U un V ir attiecīgi BC, AD un AB viduspunkti. M - nogriežņu BU un VT krustpunkts. Aprēķināt $\triangle BMV$ laukumu!

Risinājums: $S(VBT) = \frac{1}{8}$. $\triangle VBM \sim \triangle TUM(\ell\ell\ell)$, līdzības koeficients $1 : 2$. Tātad $\frac{VM}{MT} = \frac{1}{2}$ un $\frac{VM}{VT} = \frac{1}{3}$. Trīsstūriem $\triangle VBT$ un $\triangle VBM$ no B vilktais augstums sakrīt, tātad to laukumi ir proporcionāli pamatiem. $S(BMV) = \frac{1}{3}S(VBT) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$.

12. Dots trijstūris $\triangle ABC$. Zināms, ka trijstūra malām izpildās vienādība $AB^2 = BC^2 + CA^2$. Pierādīt, ka mala AB nevar būt īsāka kā $\frac{2}{5}$ trijstūra perimetra.

Risinājums: Apzīmēsim trijstūra malu garumus ar $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Uzdevums prasa pierādīt nevienādību $\frac{2}{5}(a + b + c) < c$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}(a+b+c) &< c \qquad \text{tā kā } c > 0 \text{ kā malas garums, dalām abas vienādojuma puses} \\
\frac{2}{5}\frac{(a+b+c)}{c} &< 1 \\
\frac{a+b+c}{c} &< \frac{5}{2} \\
\frac{a+b}{c} + 1 &< \frac{5}{2} \\
\frac{a+b}{c} &< \frac{3}{2} \\
2(a+b) &< 3c \qquad \text{Abas nevienādības puses ir pozitīvas, tāpēc varam to kāpināt kvadrātā.} \\
4a^2 + 8ab + 4b^2 &< 9c^2 \qquad \text{Aizvietojam } c^2 = a^2 + b^2 \text{ pēc dotā.} \\
4a^2 + 8ab + 4b^2 &< 9(a^2 + b^2) \\
0 &< 5a^2 - 8ab + 5b^2 \\
0 &< a^2 + 4(a-b)^2 + b^2
\end{aligned}$$

Kvadrātu summa ir nenegatīva, turklāt $a^2+4(a-b)^2+b^2=0$ tad un tikai tad, ja $a=b=0$, bet šāds trijstūris nav iespējams, tātad $a^2+4(a-b)^2+b^2>0$. Tika veikti tikai ekviavalenti pārveidojumi, tātad prasītais ir pierādīts.

13. Seši astoņkāji izpilda deju. Vispirms nejaušs skaits astoņkāju sadodas rokās ar taustekļiem. Pēc tam tie atkārto sekojošu soli ik pa minūtei: visi astoņkāji, kas bija sadevušies rokās, atlaiž rokas, un visi tie, kas nebija sadevušies rokās, sadodas rokās. Pierādīt, ka kādā brīdī varēs atrast trīs astoņkājus, kuri ir sadevušies rokās katrs ar katru. Katram astoņkājim ir 8 taustekļi, un divi astoņkāji sadodas rokās tikai ar vienu taustekli katrs.

    Risinājums: Apskatam vienu astoņkāji, nosauksim to par A. Vai nu pirmajā vai otrajā solī tas būs sadevies rokās ar vismaz trīs citiem astoņkājiem - B, C un D. Ja B un C arī ir sadevušies rokās, tad A, B, C astoņkāji izpilda prasīto. Ja C un D ir sadevušies rokās, tad A, C, D izpilda prasīto. Ja B un D būs sadevušies, tad A, B, D izpildīsies. Ja ne B un C, ne B un D un ne C un D būs sadevušies ar taustekļiem, tad nākamajā solī tie sadosies un B, C, D izpildīs prasīto.

14. Atrast visus tādus naturālus n, ka $n^2+6n-15$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.

    Risinājums:

$$\begin{aligned} n^2+6n-15 &= (n+3)^2-24 \\ (n+3)^2-24 &= a^2 \qquad a \text{ - naturāls skaitlis} \\ (n+3)^2-a^2 &= 24 \\ (n+3-a)(n+3+a) &= 24 \end{aligned}$$

    Veicot skaitļa 24 dalītāju pārlasi, iegūst, ka $n=2$ un $n=4$ ir vienīgie atrisinājumi.

15. Dots trijstūris ABC. Uz malas AB atlikts nogrieznis FN tāds, ka $AF=FN=NB$. Uz malas CB atlikts punkts E tāds, ka $FE \parallel AC$. H ir FE viduspunkts. Ja $FE=EB$, pierādīt, ka četrstūris $HNEC$ ir paralelograms.

    Risinājums:

    1) Punktus F un N uz nogriežņa AB var atlikt tikai secībā A, F, N, B, citādi F un N sakrīt, kas ir pretrunā ar to, ka FN ir nogrieznis.
    2) $FE \parallel AC$ un $AF=\frac{1}{3}AB \implies CE=\frac{1}{3}CB$, $EB=\frac{2}{3}CB$.
    3) H - FE viduspunkts un N - FB viduspunkts, tātad NH ir $\triangle EFB$ viduslīnija. No tā seko, ka $NH \parallel EB$ un $NH=\frac{1}{2}EB$.
    4) $NH=\frac{1}{2}EB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}CB=\frac{1}{3}CB$
    5) $NH \parallel EB$ (c), tātad arī $NH \parallel CE$. $CE=\frac{1}{3}CB$ (b) un $NH=\frac{1}{3}CB$ (d). No paralelograma pazīmes seko, ka $HNEC$ ir paralelograms.