atvērtā kopa 2018

Komandu olimpiāde matemātikā
Atrisinājumi 9. klasei

1. Votivapu valodā visi vārdi sastāv tikai no burtiem X, D un A, turklāt vārds nedrīkst sākties līdzskani vai beigties ar patskani. Cik dažādu vārdu pastāv Votivapu valodā, ja zināms, ka katrā vārdā ir vismaz viens burts un ne vairāk kā 70 burti? (X un D ir līdzskaņi, A - patskanis).

   Risinājums: Pierādīsim, ka jebkuru vārdu Votivapu valodā ir iespējams pārveidot par 70 burtus garu virkni, kas sastāv no burtiem X, D, A, sākas ar A un satur vismaz vienu līdzskani (šāda veida virknes sauksim par "labām virknēm") tieši vienā veidā un otrādāk.

   Konstrukcija ir sekojoša: sākot ar jebkuru vārdu Votivapu valodā, tam beigās pierakstīsim tam galā burtus A līdz tas ir 70 burtus garš. Ievērosim, ka virkne sākas ar patskani un ka šajā virknē noteikti ir vismaz viens līdzskanis, jo visi vārdi Votivapu valodā beidzas ar līdzskani un sākas ar patskani. Tātad šī virkne ir laba virkne.

   No otras puses, ja mēs sākam ar jebkuru labu virkni, tad veids, kurā mēs iegūstam Votivapu valodas vārdu ir sekojošs: no virknes beigām izdzēšam visus patskaņus līdz uzduramies līdzskanim, mēs noteikti tātad uzdursimies, jo katra laba virkne satur vismaz vienu līdzskani. Šis vārds sākas ar patskani, jo katra laba virkne sākas ar patskani, un beidzas ar līdzskani jo visus patskaņus no virknes beigām esam izdzēsuši. Līdz ar to patiešām esam ieguvuši vārdu Votivapu valodā.

   Ievērosim, ka abas metodes atgriež viena otru, proti ja sākam ar vārdu Votivapu valodā, iegūstam labu virkni izmantojot pirmo metodi un tad no šīs virknes iegūstam sākotnējo vārdu. Līdzīgi otrā virzienā.

   Līdz ar to, iegūstam, ka Votivapu valodas vārdi ir tiešā atbilstībā ar labām virknēm, tātad Votivapu valodā ir tieši tikpat daudz vārdus, cik labu virkņu. Ievērosim, ka pirmo burtu varam izvēlēties 1 veidā, pārējos 69 burtus 3 veidos, līdz ar to ir $3^{6}9$ virkņu garumā 70, kas sākas ar patskani. Un ir tieši viena virkne, kura nesatur vismaz vienu līdzskani (virkne, kas sastāv no visiem patskaņiem), līdz ar to ir $3^{69} - 1$ laba burtu virkne.

   Līdz ar to Votivapu valodā ir $3^{69} - 1$ vārds.

2. Uz galda stāv trīs dažādas cepures: zaļa, dzeltena un sarkana. Reinis, Elīza un Toms katrs uzvelk vienu no cepurēm. Zināms, ka izpildās tieši viens sekojošajiem apgalvojumiem:

   (a) Reinim galvā ir zaļa cepure

   (b) Elīzai galvā nav zaļa cepure

   (c) Tomam galvā nav sarkana cepure

   Vai zinot šo informāciju iespējams noteikt kādas krāsas cepure ir galvā katram cilvēkam?

   Risinājums: Jā, veicot pārlasi var noskaidrot, ka vienīgais iespējamais patiesais apgalvojums ir c). Tādā gadījumā zaļā cepure ir Elīzai, dzeltenā ir Tomam un sarkanā Reinim.

3. Mikum ir 33 peonijas un 64 pienenes. Puķu tirgū pie viena tirgotāja par 7 pienenēm varēja iegūt 3 peonijas, bet otrs pārdevējs mainīja 2 peonijas pret 12 pienenēm. Vai atkārtoti mainot puķes šajā tirgū, Mikus var iegūt tieši 2018 puķes?

   Risinājums: No sākuma ir $33 + 64 = 97$ puķes - nepāra skaits. Apmaiņas tirgū maina puķu skaitu par $7 - 3 = 4$ vai $12 - 2 = 10$ puķēm - pāra skaitu. Tātad veicot apmaiņas var iegūt tikai nepāra skaitu puķu, bet 2018 ir pāra skaitlis.

4. Atrast lielāko naturālo x, kuram $\sqrt{x^2+9x}$ ir vesels skaitlis!

Risinājums:

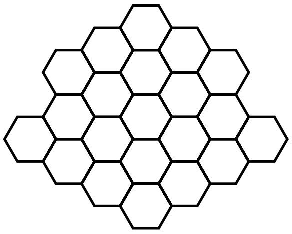
$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+9x} &= a \qquad \text{a - vesels skaitlis}\\
9x+x^2 &= a^2\\
(x+\frac{9}{2})^2-\frac{81}{4} &= a^2\\
(x+\frac{9}{2})^2-a^2 &= \frac{81}{4}\\
(x+\frac{9}{2}+a)(x+\frac{9}{2}-a) &= \frac{81}{4}\\
(2x+9+2a)(2x+9-2a) &= 81
\end{aligned}$$

Abas iekavas ir veseli skaitļi, tāpēc pārlasam skaitļa 81 dalītājus:

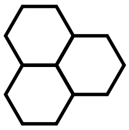
$$\begin{cases}2x+9+2a=81\\2x+9-2a=1\end{cases} \qquad \begin{cases}2x+9+2a=27\\2x+9-2a=3\end{cases} \qquad \begin{cases}2x+9+2a=9\\2x+9-2a=9\end{cases}$$

$x=16$ $\qquad$ $x=3$ $\qquad$ $x=0$

Esam ieguvuši, ka lielākais x, pie kura $\sqrt{x^2+9x}$ ir vesels skaitlis, ir 16.



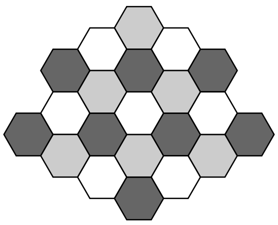
1. zīm.



2. zīm.

5. Vai 1. zīmējumā attēloto laukumu iespējams pilnībā noklāt izmantojot 2. zīmējumā attēlotās figūras (tās nedrīkst pārklāties)?

Risinājums: Apskata krāsojumu, kā parādīts 3. zīmējumā:



3. zīm.

Krāsojumā ir 7 balti, 6 gaiši pelēki un astoņi tumši pelēki lauciņi, bet katra figūra noklāj tieši vienu lauciņu no katras krāsas. Tātad doto laukumu nav iespējams noklāt kā prasīts.

6. Zināms, ka x un y ir naturāli skaitļi. Dalot skaitli x ar y, rodas atlikums 24, bet dalot $2x$ ar y, atlikums ir 11. Noteikt y vērtību!

Risinājums: No dotā $x = ny + 24, 2x = my + 11$ $(m, n \in \mathbb{N})$. $2x = 2(ny + 24) = 2ny + 48$.

$$\begin{cases} 2x = my + 11 \\ 2x = 2ny + 48 \end{cases}$$

$$my + 11 = 2ny + 48$$

$$y(m - 2n) = 37$$

Skaitļa 37 vienīgie dalītāji ir 1 un 37. $m - 2n$ un y ir naturāli skaitļi, tādēļ $y = 37$ vai $y = 1$. $y = 1$ neder, jo dalot ar 1 nevar iegūt atlikumu 24. Tātad $y = 37$.

7. *ABCD* ir kvadrāts ar malas garumu 1. T, U un V ir attiecīgi BC, AD un AB viduspunkti. M - nogriežņu BU un VT krustpunkts. Aprēķināt $\triangle BMV$ laukumu!

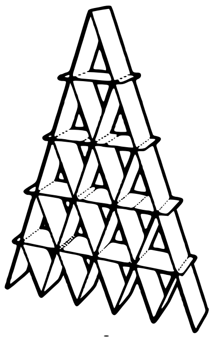
   Risinājums: $S(VBT) = \frac{1}{8}$. $\triangle VBM \sim \triangle TUM(\ell\ell\ell)$, līdzības koeficients $1 : 2$. Tātad $\frac{VM}{MT} = \frac{1}{2}$ un $\frac{VM}{VT} = \frac{1}{3}$. Trīsstūriem $\triangle VBT$ un $\triangle VBM$ no B vilktais augstums sakrīt, tātad to laukumi ir proporcionāli pamatiem. $S(BMV) = \frac{1}{3}S(VBT) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$.

8. Pa apli sarakstīti vairāki pozitīvi skaitļi tā, ka katrs skaitlis ir vienāds ar kvadrātsakni no abu blakusesošo skaitļu reizinājuma. Atrast visu uzrakstīto skaitļu reizinājumu, ja zināms, ka viens no skaitļiem aplī ir 1.

   Risinājums: Vispirms ievērosim, ka ja $0 < a < b$, tad $a^2 < ab < b^2$, līdz ar to arī $a < \sqrt{ab} < b$. Tātad jebkurš skaitlis virknē ir ne lielāks kā lielākais no abiem blakusesošajiem skaitļiem.

   Apskatam lielāko skaitli, kas ierakstīts aplī (ja tādi aplī ir vairāki, izvēlamies vienu no tiem). Lielākais skaitlis noteikti ir ne lielāks, kā tam blakus esošie skaitļi. Tātad abi blakusesošie skaitļi ir vienādi ar lielāko skaitli, jo ja tie būtu lielāki, tā būtu pretruna. Atkārtoti pielietojot iepriekšējo spriedumu iegūstam, ka visi aplī ierakstītie skaitļi ir vienādi ar lielāko aplī ierakstīto skaitli.

   Tā kā visi skaitļi ir vienādi, un skaitlis 1 parādās aplī, tad visi skaitļi vienādi ar 1. Tātad visu skaitļu reizinājums aplī ir $1^n = 1$.



4. zīm.

9. Dots kāršu namiņš, būvēts kā redzams attēlā. Cik kāršu ir namiņā ar k stāviem ? Piemēram, 4. zīmējumā redzamajam namiņam ir 5 stāvi.

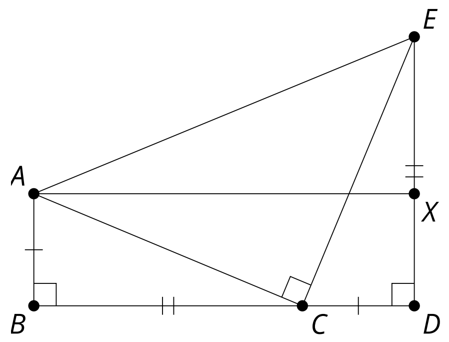
   Risinājums: Namiņā ir $3\frac{k(k+1)}{2} - k$ kāršu. Varam ievērot, ka katru i-to stāvu ($i \neq k$) veido i skaits kāršu "trijstūrīšu". Apakšējā stāvā ir par k kārtīm mazāk, nekā, ja to veidotu "trijstūrīši". Tātad kopā mums ir 3 aritmētiskās progresijas mīnuss k kārtis.

10. Plakne nokrāsota 8 dažādās krāsās. Pierādi, ka uz tās var atrast divus vienas krāsas punktus, starp kuriem attālums centimetros ir vesels skaitlis!

    Risinājums: Izvēlamies 9 punktus uz vienas taisnes ar 1 cm intervāliem. Pēc dirihlē principa vismaz 2 no tiem būs vienā krāsā, kā arī attālums starp tiem centimetros būs vesels skaitlis.

11. Taisnleņķa trijstūra ABC hipotenūza ir AC. Pierādīt, ka $AB + BC \leq \sqrt{2}AC$.

Risinājums:



5. zīm.

Uz malas BC pagarinājuma atliksim punktu D tā, ka $CD = AB$. No punkta D konstruēsim perpendikulu pret malu CD. Uz perpendikula atliksim punktu E tā, ka $ED = BC$ un ka E atrodas tajā pašā pusē taisnei BD kā punkts A.

Tā kā $AB = CD$, $\angle ABC = \angle CDE$, $BC = DE$, tad $\triangle ABS = \triangle CDE(mlm)$. Bet tas nozīmē, ka $AC = CE$, papildu, $\angle ACE = 180^\circ - \angle ACB - \angle ECD = 90^\circ$, līdz ar to varam aprēķināt $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = AC\sqrt{2}$ pēc Pitagora teorēmas.

Atliek vien ievērot, ka, ja mēs konstruējam perpendikulu AX no A pret malu DE, tad $ABDX$ ir taisnstūris un līdz ar to $AX = BD = BC + CD = AB + BC$. Bet no trijstūra nevienādības trijstūrī AEX izriet, ka

$$AB + BC = AX \leq AE - EX \leq AE = \sqrt{2}AC$$

Kas arī bija jāpierāda.

12. Cik dažādu vērtību var pieņemt izteiksme $\left\lfloor \frac{x^2}{1337} \right\rfloor$, ja $1 \leq x \leq 1337$ un x ir reāls skaitlis?

Piebilde: $\lfloor x \rfloor$ ir lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x. Piemēram $\lfloor 2.2 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

Risinājums: Ja $x = \sqrt{1337n}$, $n \in \mathbb{N}$, funkcija var pieņemt jebkādu vērtību n: $\left\lfloor \frac{(\sqrt{1337n})^2}{1337} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1337n}{1337} \right\rfloor =$ $\lfloor n \rfloor = n$. $1 \leq x \leq 1337$, tātad funkcijas vērtības ir veselie skaitļi intervālā $[\left\lfloor \frac{1^2}{1337} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1337^2}{1337} \right\rfloor] = [\left\lfloor \frac{1}{1337} \right\rfloor, \lfloor 1337 \rfloor] =$ $[0, 1337]$, tātad izteiksme var pieņemt 1338 dažādas vērtības.

13. Telpā guļ 42 skolēni. Viņus uzmodina pavārs, kurš tikko ieskrējis telpā. Viņš visiem paziņo, ka vismaz viens no klātesošajiem vakar ir aizticis viņa spageti makaronus, jo viņš redzot vismaz vienu cilvēku, kura seja ir netīra ar spageti mērci. Neviens skolēns gan neatceras iepriekšējās dienas notikumus. Viņi redz visu pārējo sejas, bet ne savējo. Pavārs paziņo, ka ritmiski sitīs ar karoti pa katlu, līdz katrs, kurš zina, ka viņam uz sejas ir mērce, būs piecēlies kājās. Pēc katra sitiena katram skolēnam ir iespēja piecelties kājās. Kad pavārs sāk sitienus, skolēni klusējot skatās apkārt un redz, ka neviens neceļas kājās, bet pēc tieši 13 sitieniem kājās pēkšņi pieceļas vairāki skolēni. Cik skolēni piecēlās kājās?

Piebilde: Šajā skolā ir vispārzināms, ka pavārs nespēj melot un tas, ka ka visi skolēni ir perfekti loģiski domājoši un patiešām celsies kājās, ja zinās to, ka viņiem uz sejas ir spageti mērce. Skolēni savā starpā nevar nekā komunicēt.

Risinājums: Ar matemātiskās indukcijas metodi pierādīsim, ka n cilvēki ar netīru seju pieceļas pēc n sitieniem.

Indukcijas bāze: Ja tikai vienam skolēnam būtu netīra seja, tad pēc pirmā sitiena viņš pieceltos kājās, zinot, ka vismaz vienam skolēnam ir netīra seja.

Induktīvais pieņēmums: pieņemsim, ka k cilvēki pieceļas kājās pēc k sitieniem. Induktīvā pāreja: Ja $k+1$ cilvēkiem ir netīras sejas, tad pēc $k+1$ sitieniem katrs no viņiem to sapratīs, jo citādi pēc induktīvā pieņēmuma katram no viņiem redzamie redzamie k cilvēki ar netīrajām jau būtu piecēlušiem pēc k sitieniem. Tā kā pēc k sitieniem neviens nepiecēlās, tad zināms, ka bez pārējiem k cilvēkiem ir vēl viens ar netīru seju - tātad, viņš pats.

Secinām, ka pēc 13 sitieniem kājās piecelsies 13 skolēni.

14. Atrast visus veselos atrisinājumus vienādojumam $x^4 = y^4 - 65$

Risinājums:

$$x^4 = y^4 - 65$$
$$y^4 - x^4 = 65$$
$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) = 13 \cdot 5 = 65 \cdot 1$$

Ievērosim, ka $y^2 - x^2 \leq y^2 + x^2$, tādēļ vai nu $y^2 - x^2 = 1$ un $y^2 + x^2 = 65$ vai $y^2 - x^2 = 5$ un $y^2 + x^2 = 13$.

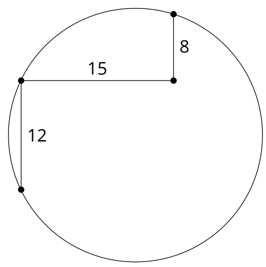
Ja $y^2 - x^2 = (y-x)(x+y) = 1$, tad $y - x = x + y = 1$, jo $y > x$ nozīmē, ka $y - x$ ir pozitīvs. Bet tad $2y = (y-x) + (y+x) = 2 \Rightarrow y = 1$, līdzīgi, $x = 0$. Skaidrs, ka tad $x^2 + y^2 = 1 \neq 65$, tātad vienādojumam nav atrisinājumu.

Apskatam otru gadījumu:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ y^2 + x^2 = 13 \end{cases} \qquad \text{Saskaitām abus vienādojumus}$$
$$2y^2 = 18$$
$$y^2 = 9$$
$$y = \pm 3$$
$$x = \pm 2$$

Tātad vienādojumam ir 4 veseli atrisinājumi: $(2;3), (2;-3), (-2;3), (-2;-3)$.

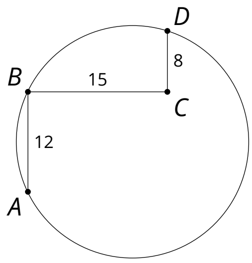
15. Noteikt 6. zīmējumā dotās riņķa līnijas rādiusu!



6. zīm.

Risinājums: Piebilde: 6. zīmējumā tika pieņemts, ka dotie nogriežņi ir savstarpēji perpendikulāri, tomēr tas netika pietiekami atspoguļots nedz formulējumā nedz zīmējumā. Tika pieņemti gan risinājumi, kas pieņēma, ka leņķi ir taisni, gan risinājumi, kas pieņēma, ka tie nav taisni.

Risinājums, ja leņķi tiek pieņemti par taisniem:



7. zīm.

Atliksim punktu E tādu, ka $ABCE$ ir taisnstūris. Iegūstam, ka $AE = BC = 15$ un $CE = AB = 12$. Tā kā $\angle DCB = \angle ECB = 90°$, tad D, C, B atrodas uz vienas taisnes, līdz ar to $DE = DC + CE = 20$. Pēc Pitagora teorēmas trijstūrī ADE iegūstam, ka $AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = 25$. Līdzīgi trijstūrī BCD, $DB = \sqrt{AC^2 + CD^2} = 17$.

Pagarināsim nogriezni BC līdz tā krustpunktam ar riņķa līniju F. Tā kā $\angle ABF = 90°$, tad AF ir riņķa līnijas diametrs, turklāt $\angle ABF = \angle ADF$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu loku. Bet tad $\angle ADF = 90° = \angle BCD$, un $\angle DBF = \angle DAF$ kā leņķi, kas balstās uz vienu loku. Līdz ar to secinām, ka DBC līdzīgs FAD. Līdz ar to $dfracAFAD = \frac{BD}{BC}$, tātad $AF = \frac{AD \cdot DB}{BC} = \frac{25 \cdot 17}{15} = \frac{85}{3} = 28\frac{1}{3}$. Bet AF ir diametrs, līdz ar to rādius is $14\frac{1}{6}$.

Atrisinājums, ja leņķi ir patvaļīgi:
Ievērosim, ka lai garākais nogrieznis atrastos iekš riņķa līnijas, tās diametram jābūt vismaz 15. Dotos nogriežņus patiešām iespējams ievietot riņķa līnijā kuras rādiuss ir $\dfrac{15}{2} = 7,5$. No otras puses, jebkura riņķa līnija ar lielāku rādiusu arī ir iespējama: Ievietojam nogriežņus $15, 8$, tā kā to bija iespējams izdarīt riņķa līnijā ar rādiusu 7.5, tad to ir iespējams izdarīt arī jebkurā riņķa līnijā ar lielāku rādiusu. Atleik vien ievērot, ka nogriezni 8 vienmēr varēs pievienot šai konstrukcijai. Līdz ar to rādius var būt jebkurš skaitlis lielāks vai vienāds ar 7.5.