Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

atvērtā kopa 2018

Uzdevumi 10. klasei

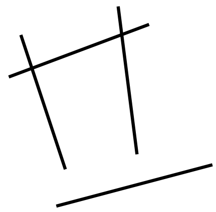
1. Pierādīt, ka $x^6 - x^3 + 7 > 0$ visiem reāliem skaitļiem x!

2. Vai iespējams 4 nogriežņus izkārtot tā, ka katrs no tiem krustojas ar

   a) $1, 2, 2$ un 3 citiem nogriežņiem;

   b) $1, 2, 3$ un 3 citiem nogriežņiem?

   Gadījums, kur krustotos ar 0, 1, 1 un 2 nogriežņiem, parādās 1. zīmējumā.



1. zīm.

3. Cik ir tādu taisnleņķa trijstūru, kuru perimetrs un laukums ir vienādi un visas malas ir naturāli skaitļi?

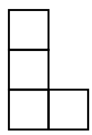
4. Dots trijstūris ABC. Uz malas AB atlikts nogrieznis FN tāds, ka $AF = FN = NB$. Uz malas CB atlikts punkts E tāds, ka $FE \parallel AC$. H ir FE viduspunkts. Ja $FE = EB$, pierādīt, ka četrstūris $HNEC$ ir paralelograms.

5. Izpildās vienādība

$$2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot \ldots \cdot 2018^{2018} \cdot 2018^{2018} = 2018^{2018^{2018}}$$

   Cik reižu skaitlis 2018 parādās vienādības kreisajā pusē?

6. Dots, ka $m \times n$ rūtiņu laukums ir pilnībā noklāts ar L veida tetramino figūrām (2. zīm.), kuras nepārklājas. Pierādīt, ka šīs figūras ir pāra skaitā.



2. zīm.

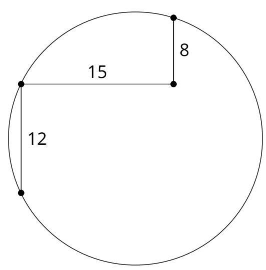
7. Skaitļi p, q un $p^q + q^p$ visi ir pirmskaitļi. Kādas ir iespējamās p un q vērtības?

8. Taisnleņķa trijstūra ABC hipotenūza ir AC. Pierādīt, ka $AB + BC \leq \sqrt{2}AC$.

9. Seši astoņkāji izpilda deju. Vispirms nejaušs skaits astoņkāju sadodas rokās ar taustekļiem. Pēc tam tie atkārto sekojošu soli ik pa minūtei: visi astoņkāji, kas bija sadevušies rokās, atlaiž rokas, un visi tie, kas nebija sadevušies rokās, sadodas rokās. Pierādīt, ka kādā brīdī varēs atrast trīs astoņkājus, kuri ir sadevušies rokās katrs ar katru. Katram astoņkājim ir 8 taustekļi, un divi astoņkāji sadodas rokās tikai ar vienu taustekli katrs.

10. Vai jebkuru divu dažādu naturālu skaitļu a un b kvadrātiem eksistē naturāls c, ka tieši viens no skaitļiem $c + a^2$ un $c + b^2$ ir naturāla skaitļa kvadrāts?

11. Noteikt 3. zīmējumā dotās riņķa līnijas rādiusu!



3. zīm.

12. Cik dažādu vērtību var pieņemt izteiksme $\left\lfloor \frac{x^2}{1337} \right\rfloor$, ja $1 \leq x \leq 1337$ un x ir reāls skaitlis?

    Piebilde: $\lfloor x \rfloor$ ir lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x. Piemēram $\lfloor 2.2 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

13. 7 komandas biedri ierodas uz olimpiādi un sparīgi risina uzdevumus. Pēc visu uzdevumu atrisināšanas skolēni paņem savus zīmuļus, bet izrādās, ka daži no biedriem ir paņēmuši cita rakstāmo.

    Skolēni izdomāja metodi, kā apmainīties atpakaļ ar zīmuļiem: četri no skolēniem sastājas aplī un nodod savu zīmuli pa labi esošajam. Sauksim šo apmaiņu par "soli". Pēc katra soļa izpildes, aplī stāvošie četri skolēni drīkst mainīties ar vietām, kā arī pamest apli un savā vietā ielaist skolēnu, kas iepriekšējā solī nav bijis aplī. Pēc tam aplī esošie skolēni atkal veic zīmuļu padošanu pa apli, tādējādi veicot jaunu soli.

    Vai atkārtoti izpildot šīs darbības, visiem skolēniem ir iespējams atgūt savus zīmuļus?

14. Izmantojot ciparus $1, 2, 3, 4, 5$ katru tieši vienu reizi, izveidot skaitli, kuram ir mazākais attālums līdz tā tuvākajam kvadrātam. Piemēram, ja izveido skaitli 14352, tā tuvākais kvadrāts ir $120^2 = 14400$, līdz ar to attālums ir 48.

15. Atrast mazāko naturālo skaitli n, lai būtu iespējams pilnībā noklāt patvaļīgu šaurleņķu trijstūri izmantojot ne vairāk kā n vienādsānu trijstūrus!