atvērtā kopa 2018

# Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

## Uzdevumi 11. klasei

1. Izpildās vienādība

$$2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot 2018^{2018} \cdot \ldots \cdot 2018^{2018} \cdot 2018^{2018} = 2018^{2018^{2018}}$$

   Cik reižu skaitlis 2018 parādās vienādības kreisajā pusē?

2. Uz galda stāv trīs dažādas cepures: zaļa, dzeltena un sarkana. Reinis, Elīza un Toms katrs uzvelk vienu no cepurēm. Zināms, ka izpildās tieši viens sekojošajiem apgalvojumiem:

   (a) Reinim galvā ir zaļa cepure

   (b) Elīzai galvā nav zaļa cepure

   (c) Tomam galvā nav sarkana cepure

   Vai zinot šo informāciju iespējams noteikt kādas krāsas cepure ir galvā katram cilvēkam?

3. Zināms, ka $x$ un $y$ ir naturāli skaitļi. Dalot skaitli $x$ ar $y$, rodas atlikums 24, bet dalot $2x$ ar $y$, atlikums ir 11. Noteikt $y$ vērtību!

4. Dots trijstūris $ABC$. Uz malas $AB$ atlikts nogrieznis $FN$ tāds, ka $AF = FN = NB$. Uz malas $CB$ atlikts punkts $E$ tāds, ka $FE \parallel AC$. $H$ ir $FE$ viduspunkts. Ja $FE = EB$, pierādīt, ka četrstūris $HNEC$ ir paralelograms.

5. Pa apli sarakstīti vairāki pozitīvi skaitļi tā, ka katrs skaitlis ir vienāds ar kvadrātsakni no abu blakusesošo skaitļu reizinājuma. Atrast visu uzrakstīto skaitļu reizinājumu, ja zināms, ka viens no skaitļiem aplī ir 1.

6. Telpā guļ 42 skolēni. Viņus uzmodina pavārs, kurš tikko ieskrējis telpā. Viņš visiem paziņo, ka vismaz viens no klātesošajiem vakar ir aizticis viņa spageti makaronus, jo viņš redzot vismaz vienu cilvēku, kura seja ir netīra ar spageti mērci. Neviens skolēns gan neatceras iepriekšējās dienas notikumus. Viņi redz visu pārējo sejas, bet ne savējo. Pavārs paziņo, ka ritmiski sitīs ar karoti pa katlu, līdz katrs, kurš zina, ka viņam uz sejas ir mērce, būs piecēlies kājās. Pēc katra sitiena katram skolēnam ir iespēja piecelties kājās. Kad pavārs sāk sitienus, skolēni klusējot skatās apkārt un redz, ka neviens neceļas kājās, bet pēc tieši 13 sitieniem kājās pēkšņi pieceļas vairāki skolēni. Cik skolēni piecēlās kājās?
   **Piebilde:** Šajā skolā ir vispārzināms, ka pavārs nespēj melot un tas, ka ka visi skolēni ir perfekti loģiski domājoši un patiešām celsies kājās, ja zinās to, ka viņiem uz sejas ir spageti mērce. Skolēni savā starpā nevar nekā komunicēt.

7. Atrast visus veselos atrisinājumus vienādojumam $x^4 = y^4 - 65$

8. Taisnleņķa trijstūra $ABC$ hipotenūza ir $AC$. Pierādīt, ka $AB + BC \leq \sqrt{2}AC$.

9. Katru naturālo skaitli nokrāsosim sarkanu, violetu, zilu vai dzeltenu tā, ka katru violeto skaitli var izteikt kā sarkana un zila skaitļa summu un katra sarkanā un zilā skaitļa summa ir violeta. Vai iespējams, ka katru krāsu esam izmantojuši bezgalīgi daudz reižu?

10. 7 komandas biedri ierodas uz olimpiādi un sparīgi risina uzdevumus. Pēc visu uzdevumu atrisināšanas skolēni paņem savus zīmuļus, bet izrādās, ka daži no biedriem ir paņēmuši cita rakstāmo.

Skolēni izdomāja metodi, kā apmainīties atpakaļ ar zīmuļiem: četri no skolēniem sastājas aplī un nodod savu zīmuli pa labi esošajam. Sauksim šo apmaiņu par "soli". Pēc katra soļa izpildes, aplī stāvošie četri skolēni drīkst mainīties ar vietām, kā arī pamest apli un savā vietā ielaist skolēnu, kas iepriekšējā solī nav bijis aplī. Pēc tam aplī esošie skolēni atkal veic zīmuļu padošanu pa apli, tādējādi veicot jaunu soli.

Vai atkārtoti izpildot šīs darbības, visiem skolēniem ir iespējams atgūt savus zīmuļus?

11. Izmantojot ciparus $1, 2, 3, 4, 5$ katru tieši vienu reizi, izveidot skaitli, kuram ir mazākais attālums līdz tā tuvākajam kvadrātam. Piemēram, ja izveido skaitli 14352, tā tuvākais kvadrāts ir $120^2 = 14400$, līdz ar to attālums ir 48.

12. Atrast mazāko naturālo skaitli $n$, lai būtu iespējams pilnībā noklāt patvaļīgu šaurleņķu trijstūri izmantojot ne vairāk kā $n$ vienādsānu trijstūrus!

13. Pierādīt, ka jebkuru polinomu ar reāliem koeficientiem $p(x)$ var "sadalīt" divos polinomos $f(x)$ un $g(x)$, proti atrast tādus $f(x)$ un $g(x)$, ka $p(x) = f(x) + g(x)$, tā, lai izpildītos $f(1) = g(2) = 0$? Vai šis sadalījums ir vienīgais iespējamais?

14. Cik dažādos veidos var nokrāsot trijstūra piramīdas skaldnes, ja dotas $n$ dažādas krāsas? Ja divi krāsojumi atšķiras tikai ar piramīdas rotāciju, tad uzskatīsim tos par vienādiem.

15. Vai eksistē naturāli skaitļi $x, y, z$, kam izpildās $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$, ja

    a) $k = 3$,
    b) $k = 2$?