atvērtā kopa 2019

Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

Uzdevumi 10. klasei

1. Ievietot kastītēs ciparus $1-9$ katru tieši vienu reizi tā, lai izpildītos vienādība:

$$\frac{\square}{\square+\square}+\frac{\square}{\square+\square}+\frac{\square}{\square+\square}=1$$

2. Atrast tādu četrciparu skaitli, ka nodzēšot jebkuru tā ciparu, iegūtais skaitlis ir sākotnējā skaitļa dalītājs.

3. Punkti P and Q izvēlēti uz $\triangle ABC$ malas BC tā, ka P ir starp B and Q, un stari AP un AQ sadala leņķi $\angle BAC$ trīs vienādās daļās. Taisne kas paralēla AQ un iet cauri P krusto malu AB punktā D. Taisne kas paralēla AP un iet caur punktu Q krusto malu AC punktā E. Vai iespējams ka DE ir $\triangle ABC$ viduslīnija?
Piezīme: Par trijstūra viduslīniju sauc taisni, kas iet cauri divu dažādu trijstūra malu viduspunktiem.

4. Ne visai tālā nākotnē uz Marsa tikusi izveidota pirmā apdzīvotā Marsa bāze. Zinātnieki vēlas veikt ekspedīciju uz tuvāko Marsa krāteri, kas atrodas 400 km attālumā. Diemžēl pieejamais visurgājējs patērē 20 litrus šķidrā ūdeņraža uz katriem 100 nobrauktajiem kilometriem un tā degvielas ietilpība ir 40 litri šķidrā ūdeņraža.

   Tomēr, ir iespējams jebkurā vietā pa ceļam apstāties un atstāt cisternu šķidrā ūdeņraža, šajā gadījumā šķidrais ūdeņradis tiek ņemts pa taisno no visurgājēja degvielas tvertnes. Tāpēc, piemēram, nobraucot 100 kilometrus un atstājot tur cisternu ar 15 litriem šķidrā ūdeņraža, visurgājējam atliek vien 5 litri šķidrā ūdeņraža, ko izmantot lai pārvietotos.

   Bāzē ir pieejams bezgalīgs daudzums šķidrā ūdeņraža. Vai ir iespējams tikt līdz tuvākajam krāterim?

5. Uz galda ir n cepumu kaudzītes, katrā pa 2 cepumiem. Aivars un Bille spēlē ar tām spēli. Vienā gājienā katrs spēlētājs var izvēlēties vienu cepumu kaudzīti un apēst no tās vismaz vienu cepumu (drīkst apēst arī abus divus, ja kaudzītē ir divi cepumi). Uzvar tas spēlētājs, kurš apēd pēdējo cepumu. Kurš no spēlētājiem var garantēt uzvaru, ja Aivars sāk?

6. Uz tāfeles augošā secībā uzrakstīti vairāki pirmskaitļi, turklāt katri divi blakusesoši pirmskaitļi atšķiras tieši par 6. Kāds lielākais skaits pirmskaitļu varēja būt uzrakstīts uz tāfeles?

7. Dots taisnleņķa trijstūris $\triangle ABC$ tā, ka visi tā malu garumi ir naturāli skaitļi. Pierādīt ka $\triangle ABC$ ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir naturāls skaitlis.

8. Dota $n \times m$ rūtiņu tabula, kur n, m - naturāli skaitļi. Katrā tabulas rūtiņā ir ierakstīts reāls skaitlis. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuru tabulas rindu vai kolonu un pareizināt visus tajā esošos skaitļus ar -1. Vai atkārtoti veicot šādus gājienus iespējams panākt, ka visi tabulā ierakstītie skaitļi kļūst nenegatīvi?

9. Atrast lielāko naturālo skaitli n tādu, ka n^2+9n ir naturāla skaitļa kvadrāts.

10. Dots četrstūris $ABCD$, kam $AB=BC$. Punkts E atlikts uz malas AB tā, ka $DB=BE$. Taisnes AD un DE ir perpendikulāras. Pierādīt ka malu AD, DC un CE vidusperpendikuli krustojās vienā punktā.

11. Katram naturālam skaitlim n ar a_n apzīmēsim lielāko divnieka pakāpi, kas dala n (piemēram $a_{2019}=1$, bet $a_{2020}=4$). Pierādīt, ka patvaļīgiem naturāliem skaitļiem i un j, kuriem izpildās $i<j$, summa

$$\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_{i+1}}+\frac{1}{a_{i+2}}+\ldots+\frac{1}{a_{j-1}}+\frac{1}{a_j}$$

   nekad nav vienāda ar naturālu skaitli.