atvērtā kopa 2019

Komandu olimpiāde matemātikā
Atrisinājumi 7. klasei

1. Divu pozitīvu skaitļu starpība ir 2, bet to kvadrātu starpība ir 10. Atrast šos skaitļus.

   Risinājums: Apzīmēsim skaitļus ar x un y. No dotā seko, ka $x - y = 2$ un $x^2 - y^2 = 10$. Izmantosim kvadrātu starpības formulu: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. Tātad $10 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 2 \cdot (x+y)$ un secinām, ka $x + y = 5$.

   Beidzot $x = \frac{(x+y)+(x-y)}{2} = \frac{2+5}{2} = 3.5$ un tādēļ $y = x - 2 = 1.5$. Tātad prasītie skaitļi is $x = 3.5$ un $y = 1.5$.

2. Ievietot kastītēs ciparus $1 - 9$ katru tieši vienu reizi tā, lai izpildītos vienādība:

$$\frac{\square}{\square+\square} + \frac{\square}{\square+\square} + \frac{\square}{\square+\square} = 1$$

   Risinājums: Der, piemēram

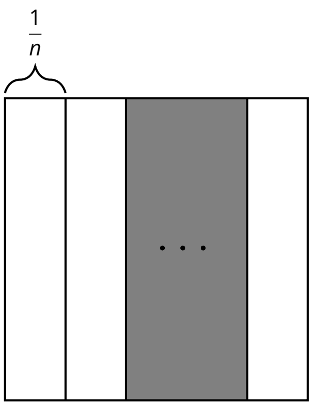
$$\frac{1}{2+4} + \frac{5}{7+8} + \frac{6}{3+9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

   Kā arī

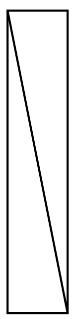
$$\frac{2}{6+9} + \frac{3}{7+8} + \frac{4}{1+5} = \frac{2}{15} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = 1$$
$$\frac{2}{7+8} + \frac{3}{6+9} + \frac{4}{1+5} = \frac{2}{15} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = 1$$

3. Dots pāra skaitlis n un kvadrāts ar malas garumu 1. Pierādīt, ka kvadrātu var sagriezt n trijstūros tā, ka visiem trijstūriem ir vienāds laukums.

   Risinājums: Tā kā n ir pāra, tad $n = 2m$, kur m ir vesels skaitlis. Sagriezīsim kvadrātu m vienādās taisnstūra strēmelēs ar augstumu 1 un platumu $\frac{1}{m}$, kā parādīts 1. zīmējumā.



1. zīm.


2. zīm.

   Pēc tam sagriezīsim katru strēmeli uz pusēm pa diagonāli, tādējādi izveidojot divus vienādus taisnleņķa trijstūrus kā parādīts 2. zīmējumā.

   Līdz ar to esam sagriezuši kvadrātu $2m = n$ vienādos trijstūros, kuriem noteikti būs vienāds laukums.

4. Vai var atrast tādus 6 veselus skaitļus, lai no to pāru summām septiņas būtu pozitīvas, septiņas − negatīvas un viena vienāda ar nulli?

Risinājums: Vispirms atrisināsim vienkāršāku uzdevumu - atradīsim četrus skaitļus - divus negatīvus un divus pozitīvus, ka trīs no to pāru summām būtu negatīvas un trīs - pozitīvas.

Piemēram der $3, 2, -1, -4$, jo $3 + 2, 3 + (-1), 2 + (-1) > 0$ un $-1 + (-4), 3 + (-4), 2 + (-4) < 0$.

Bet tas nozīmē, ka skaitļi $3, 2, 0, 0, -1, -4$ apmierina uzdevuma nosacījumus - ja apskatam $3, 2, -1, -4$ savstarpējās summas tad iegūstam 3 pozitīvas un 3 negatīvas. $0+0 = 0$ dod mums nulles summu. Visbeidzot paliek summas, kur tieši viens skaitlis ir nulle, bet šādā gadījumā, ja esam otru skaitli izvēlējušies pozitīvu tad iegūstam pozitīvu summu, un ja negatīvu - tad negatīvu. Tā kā varam pozitīvu skaitli izvēlēties divos veidos un nulli arī divos, tad kopā iegūstam 4 pozitīvas summas. Līdzīgi iegūstam 4 negatīvas.

Tātad kopā prasītie skaitļi dod 7 pozitīvas, 7 negatīvas un vienu nulles savstarpējo summu, kā prasīts.

5. Ancei ļoti patīk risināt uzdevumus. Ja Ance nerisina uzdevumus, tad viņa lasa grāmatas par to, kā risināt uzdevumus. Un ja Ance nelasa grāmatas, tad viņa skatās japāņu multfilmas. Pieņemot, ka Ance nevar darīt divas lietas vienlaikus, ko Ance dara šobrīd?

   Risinājums: Pieņemsim, ka Ance risina uzdevumus. Tā kā Ance nevar darīt vairāk kā vienu lietu vienlaikus, tad Ance šobrīd nelasa grāmatas. Bet tas nozīmē, ka Ance skatās japāņu multfilmas. Tātad Ance dara divas lietas vienlaikus, pretruna!

   Secinām, ka Ance nerisina uzdevumus, bet no tā seko, ka Ance lasa grāmatas.

6. No skaitļa 2019 atņēma tā ciparu summu, no rezultāta - tā ciparu summu, utt.
   a) Pierādiet, ka noteikti kādreiz iegūsim viencipara skaitli.
   b) Kāda būs tā vērtība?

   Risinājums: a) Nenulles skaitļa ciparu summa nevar būt nulle, tātad ja skaitlis nav nulle, tad pēc viena soļa izpildes būsim to samazinājuši. Apskatīsim pēdējo nenulles skaitli, ko iegūstam pēc soļu izpildes. No šī skaitļa atņemot tā ciparu summu iegūstam nulli. Pieņemsim, ka šis skaitlis ir $a_1 + 10a_2 + \ldots 10^n a_{n+1}$, tad

   $$0 = a_1 + 10a_2 + \ldots 10^n a_{n+1} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}) = a_2 \cdot 9 + a_3 \cdot 99 + \ldots +$$

   Līdz ar to $a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1} = 0$ un skaitlim jābūt viencipara.

   b) Pēc viena soļa izpildes no 2019 iegūsim $2019 - 12 = 2007$, ievērosim, ak 2007 dalās ar 9, līdz ar to tā ciparu summa arī dalās ar 9. Ja divi skaitļi dalās ar 9, tad to starpība arī dalās ar 9. No tā seko, ka visos nākamajos soļos iegūtie skaitļi dalīsies ar 9. Tātad beidzamais viencipara skaitlis ir 9.

7. Salmo uz tāfeles ir uzrakstījis skaitļus $1, 2, \ldots, 2019$. Viņš izvēlas divus skaitļus a un b, tādus, ka $a \geq b$, nodzēš tos, un to vietā uzraksta skaitli $a - b$ uz tāfeles. Darbība tiek atkārtota, līdz pēc kāda laika uz tāfeles ir uzrakstīts tikai viens skaitlis. Noteikt vai skaitlis ir pāra vai nepāra.

   Risinājums: Pierādīsim, ka $a+b$ ir pāra tad un tikai tad, ja $a-b$ ir pāra. Pierādījums seko apskatot sekojošu tabulu

a	b	$a+b$	$a-b$
Pāra	Pāra	Pāra	Pāra
Pāra	Nepāra	Nepāra	Nepāra
Nepāra	Pāra	Nepāra	Nepāra
Nepāra	Nepāra	Pāra	Pāra

   Tātad, ja katru reizi nodzēšot skaitļus a, b, to vietā uzrakstītu nevis $a - b$, bet $a + b$, tad rezultāta paritāte nemainītos.

   Bet no tā seko, ka beigās uzrakstītā skaitļa paritāte ir tāda pati kā visu uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa, $1+2+3+\ldots+2019 = \frac{2020 \cdot 2019}{2} = 1010 \cdot 2019$, kas ir pāra. Tātad beidzamais uz tāfeles uzrakstītais skaitlis būs pāra.

8. Skolotājs uz tāfeles uzrakstīja divus reālus pozitīvus skaitļus, kas mazāki par 2. Anna aprēķināja skaitļu summu, bet Māris to reizinājumu. Kurš no viņiem ieguva lielāku skaitli?

Risinājums: Apzīmēsim skaitļus ar x un y, tad $(x-1)(y-1) < 1$, jo $x, y < 2$. Bet pārrakstot nevienādību iegūstam

$$(x-1)(y-1) - 1 < 0$$
$$xy - x - y + 1 - 1 < 0$$
$$xy < x + y$$

Tātad Anna ieguva lielāku skaitli

9. Uz galda ir n cepumu kaudzītes, katrā pa 2 cepumiem. Aivars un Bille spēlē ar tām spēli. Vienā gājienā katrs spēlētājs var izvēlēties vienu cepumu kaudzīti un apēst no tās vismaz vienu cepumu (drīkst apēst arī abus divus, ja kaudzītē ir divi cepumi). Uzvar tas spēlētājs, kurš apēd pēdējo cepumu. Kurš no spēlētājiem var garantēt uzvaru, ja Aivars sāk?

   Risinājums: Apskatām gadījumus:

   Ja n ir pāra, tad Bille var garantēt uzvaru. Uzzīmējam visus cepumus kā $2 \times n$ tabulu. Ja Aivars kaut ko apēd, Bille apēd to pašu, simetriski pret tabulas centru. Skaidrs, ka ja Aivaram būs gājiens, tad Billei arī būs gājiens, jo tabula vienmēr ir simetriska prec centru Aivara gājiena sākumā. Tā kā katrā gājienā tiek apēsts vismaz viens cepums, tad Bille noteikti apēdīs pēdējo cepumu un uzvarēs.

   Ja n ir nepāra, tad Aivars uzvarēs. Sākumā Aivars apēd abus pirmās kaudzītes cepumus. Tagad esam situācijā, kur uz galda ir pāra skaits kaudzīšu ar 2 cepumiem, un Bille sāk. Tātad, ja Aivars seko Billes stratēģijai pāra gadījumā kā aprakstīts iepriekš, tad viņš noteikti uzvar;es.

10. Vai eksistē tāds divciparu skaitlis n, kas nebeidzas ar nulli, ka starp skaitļa pirmo un pēdējo ciparu ierakstot patvaļīgu skaitu nuļļu, jaunais skaitlis
    (a) vienmēr dalās ar sākotnējo skaitli n;
    (b) nekad nedalās ar sākotnējo skaitli n;
    (c) dažreiz dalās un dažreiz nedalās ar sākotnējo skaitli n?

    Risinājums:

    (a) Piemēram, 15 der, jo ievietojot pa vidu nulles, skaitlis vēl aizvien beigsies ar 5, līdz ar to dalīsies ar 5, un tā ciparu summa neizmainīsies un paliks 6, līdz ar to skaitlis dalīsies ar 3. Bet ja skaitlis dalās ar 3 un ar 5, tad tas dalās ar 15. Tātad ievietojot starp skaitļa 15 cipariem patvaļīgu skaitu nuļļu, beigās iegūtais skaitlis vienmēr dalās ar 15.

    (b) Piemēram, 12 der, jo ievietojot patvaļīgu skaitu nuļļu, skaitļa pēdējie divi cipari būs "02", bet tas nozīmē, ka iegūtais skaitlis nedalās ar 4, jo tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis nedalās ar 4. Bet 12 dalās ar 4, tātad jauniegūtais skaitlis nekad nedalīsies ar 12.

    (c) Piemēram, 11 der, jo $101 = 11 \cdot 9 + 2$ nedalās ar 11, bet $1001 = 11 \cdot 91$ dalās ar 11.

11. Dots, ka a un b ir neparalēlas taisnes. Plaknē uzzīmēja vēl 10 taisnes; katra no tām paralēla vai nu a, vai b. Pēc tam taisnes a un b nodzēsa. Cik punktos krustojas palikušās 10 taisnes ? Atrodiet visas iespējas un pierādiet, ka citu, bez jūsu atrastajām, nav.

    Risinājums: Tā kā taisnes a un b nav paralēlas, tad tās krustojas tieši vienā punktā. Ja taisne c paralēla taisnei a, bet taisne d paralēla taisnei b, tad taisnes a, b, c, d veido paralelogramu, un līdz ar to c un d arī krustojas tieši vienā punktā.

    Pieņemsim, ka ir uzzīmētas x taisnes ir paralēlas taisnei a un y taisnes, kas paralēlas taisnei b. Tad katra no x taisnēm krusto katru no y taisnēm tieši vienā punktā. Tātad pēc taišņu a un b nodzēšanas būs tieši $x \cdot y$ krustpunkti.

    Tā kā zināms, ka kopā ir 10 taisnes bez a un b, tad $x + y = 10$. Izveidojam tabulu:

x	y	$x \cdot y$
0	10	0
1	9	9
2	8	16
3	7	21
4	6	24
5	5	25

Citas iespējas nav jāapskata dēļ simetrijas. Līdz ar to iespējami $0, 9, 16, 21, 24$ un 25 krustpunkti. Citu iespēju nav pēc iepriekš pierādītā.