atvērtā kopa 2019

Komandu olimpiāde matemātikā
Atrisinājumi 8. klasei

1. Vai var atrast tādus 6 veselus skaitļus, lai no to pāru summām septiņas būtu pozitīvas, septiņas – negatīvas un viena vienāda ar nulli?

   Risinājums: Vispirms atrisināsim vienkāršāku uzdevumu - atradīsim četrus skaitļus - divus negatīvus un divus pozitīvus, ka trīs no to pāru summām būtu negatīvas un trīs - pozitīvas.

   Piemēram der $3, 2, -1, -4$, jo $3+2, 3+(-1), 2+(-1) > 0$ un $-1+(-4), 3+(-4), 2+(-4) < 0$.

   Bet tas nozīmē, ka skaitļi $3, 2, 0, 0, -1, -4$ apmierina uzdevuma nosacījumus - ja apskatam $3, 2, -1, -4$ savstarpējās summas tad iegūstam 3 pozitīvas un 3 negatīvas. $0+0=0$ dod mums nulles summu. Visbeidzot paliek summas, kur tieši viens skaitlis ir nulle, bet šādā gadījumā, ja esam otru skaitli izvēlējušies pozitīvu tad iegūstam pozitīvu summu, un ja negatīvu - tad negatīvu. Tā kā varam pozitīvu skaitli izvēlēties divos veidos un nulli arī divos, tad kopā iegūstam 4 pozitīvas summas. Līdzīgi iegūstam 4 negatīvas.

   Tātad kopā prasītie skaitļi dod 7 pozitīvas, 7 negatīvas un vienu nulles savstarpējo summu, kā prasīts.

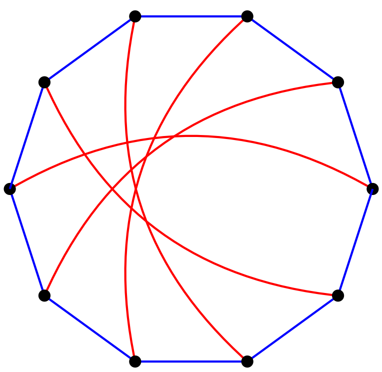
2. Kādā valstī ir n pilsētas. Starp dažām no tām noorganizēti avioreisi. Starp katrām divām pilsētām ir augstākais viens reiss. Katrā pilsētā pieejami tieši 3 dažādi avioreisi. Katrs reiss savieno tikai 2 pilsētas, pa ceļam nenolaižoties citās. Katrs reiss "darbojas" abos virzienos.

   Kādas ir iespējamās n vērtības?

   Risinājums: Apskatīsim visu avioreisu kopskaitu. No katras pilsētas iziet tieši 3 avioreisi, līdz ar to ir $3n$ "izejošie" avioreisi. Bet skaitot avioreisus šādā veidā, katrs reiss tiek ieskaitīts divreiz, jo savieno tieši divas pilsētas, un līdz ar to ir izejošs no tieši divām pilsētām. Tātad kopā ir $\frac{3n}{2}$ dažādi avioreisi. Bet tas ir naturāls skaitlis tikai ja n ir pāra.

   Ja $n < 4$ un ir pāra, tad $n = 2$, bet skaidrs, ka no katras pilsētas var iziet augstākais viens reiss pēc uzdevuma nosacījumiem. No tā secinām, ka ja uzdevuma nosacījumos aprakstītā valsts eksistē, tad pilsētu skaits n ir pāra un ne mazāks kā 4.

   No otras puses katram pāra n ne mazākam par 4 šāda valsts eksistē: novietosim pilsētas regulāra n-stūra virsotnēs. Divas pilsētas savienosim ar avioreisu, ja tās atrodas vien blakus otrai, vai ja starp tām (sekojot daudzstūra malām) ir tieši $\frac{n}{2}-1$ pilsēta (tā ir pilsēta, kas no dotās atrodas tieši pretēji, ja sekojam garākajai daudzstūra diagonālei).



1. zīm.

   Tā kā katrai virsotnei ir tieši divas malas un tieši viena pilsēta tieši iepretīm, tad no katras pilsētas iziet tieši 3 avioreisi kā prasīts.

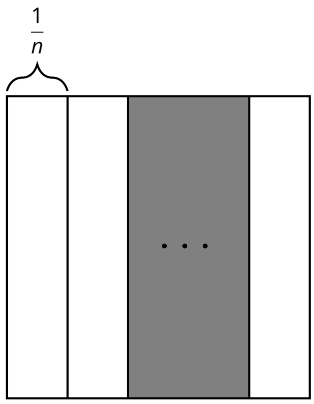
Tātad n var būt jebkurš pāra skaitlis, kas lielāks kā 2.

3. Atrast tādu četrciparu skaitli, ka nodzēšot jebkuru tā ciparu, iegūtais skaitlis ir sākotnējā skaitļa dalītājs.

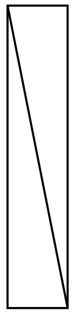
   Risinājums: Der, piemēram 1100. Ja nodzēšam jebkuru vieninieku, tad iegūstam 100, ja nodzēšam jebkuru 0 tad iegūstam 110. Abi ir skaitļa 1100 dalītāji.

4. Dots pāra skaitlis n un kvadrāts ar malas garumu 1. Pierādīt, ka kvadrātu var sagriezt n trijstūros tā, ka visiem trijstūriem ir vienāds laukums.

   Risinājums: Tā kā n ir pāra, tad $n = 2m$, kur m ir vesels skaitlis. Sagriezīsim kvadrātu m vienādās taisnstūra strēmelēs ar augstumu 1 un platumu $\frac{1}{m}$, kā parādīts 2. zīmējumā.



2. zīm.



3. zīm.

   Pēc tam sagriezīsim katru strēmeli uz pusēm pa diagonāli, tādējādi izveidojot divus vienādus taisnleņķa trijstūrus kā parādīts 3. zīmējumā.

   Līdz ar to esam sagriezuši kvadrātu $2m = n$ vienādos trijstūros, kuriem noteikti būs vienāds laukums.

5. Vai eksistē tādi dažādi naturāli skaitļi a, b, n, m, ka $a^n - b^n = a^m - b^m$?

   Risinājums: Nezaudējot vispārību pieņemsim, ka $a > b$ un $m > n$, jo skaitļi ir dažādi, un vienādība ir simetriska attiecībā pret a un b, un m un n. Tad doto vienādību varam pārrakstīt:

$$a^n - b^n = a^m - b^m$$
$$b^m - b^n = a^m - a^n$$
$$b^n\left(b^{m-n} - 1\right) = a^n\left(a^{m-n} - 1\right)$$

   Bet $b^n < a^n$ un $b^{m-n} - 1 < a^{n-m} - 1$, jo a, b naturāli, un $n, m - n$ arī naturāli, tāpēc $b^n\left(b^{m-n} - 1\right) < a^n\left(a^{m-n} - 1\right)$ un vienādība nevar izpildīties.

   Tātad tādi skaitļi neeksistē.

6. 9×9 kvadrātiskā režģī uzrakstīti skaitļi $1, 2, \ldots, 81$. Pierādīt, ka noteikti var atrast 2×2 kvadrātu, kurā summa ir lielāka par 137.

   Risinājums: Katru 2×2 kvadrātu viennozīmīgi nosaka tā augšējais kreisais stūris, un to var izvēlēties kā vienu no 8×8 apakšrežģa rūtiņām. Tātad režģī ir 64 2×2 kvadrāti.

   Ja pieņemam pretējo, ka neviena kvadrāta summa nav lielāka par 137, kopējā 2×2 kvadrātu summa nav lielāka par $137 \cdot 64 = 8768$. Šājā summā, katrs no 9×9 kvadrāta stūrīšiem ir pieskaitīts vienreiz, katra malas rūtiņa divreiz, un rūtiņas, kas ir iekšējā 7×7 kvadrātā - četrreiz.

   Skaidrs, ka summa būs mazākā iespējamā, ja mazākos skaitļus novietosim iekšējās rūtiņās, tad nākamos malējās rūtiņās, un lielākos visbeidzot stūrīšos. Bet pat šādā gadījumā summa būs vismaz

$$(81 + 80 + 79 + 78) + 2 \cdot (77 + 76 + \ldots + 50) + 4 \cdot (49 + 48 + \cdots + 1) = 318 + 2 \cdot 127 \cdot \frac{28}{2} + 4 \cdot \frac{50 \cdot 49}{2} = 8774$$

   Bet $8774 > 8768$, pretruna. Tātad vismaz vienā $2 \cdot 2$ kvadrātā summa būs lielāka kā 137.

7. Cik dažādos veidos var katrā kastīte ierakstīt $+$ vai $-$ zīmi tā lai izteiksmes vērtība dalītos ar 3?

$$4\square 1\square 2\square 3\square 6\square 3\square 9\square 7$$

Risinājums: Ievērosim, ka skaitlim pieskaitot vai no tā atņemot citu skaitli, kas dalās ar 3, netiek izmainīta sākotnējā skaitļa dalāmība ar 3. Līdz ar to varam kastītēs pirms skaitļiem $3, 6, 9$ ievietot gan $+$, gan $-$ zīmi neizmainot galējās izteiksmes dalāmību ar 3.

Apskatīsim atlikušo izteiksmi: $4\square 1\square 2\square 7$, veiksim pilno pārlasi:

Izteiksme	Dalās ar 3?
$4+1+2+7=14$	Nē
$4+1+2-7=0$	Jā
$4+1-2+7=10$	Nē
$4-1+2+7=12$	Jā
$4+1-2-7=-4$	Nē
$4-1+2-7=-2$	Nē
$4-1-2+7=8$	Nē
$4-1-2-7=-6$	Jā

Tātad ir trīs veidi kā ierakstīt kastītēs $+$ vai $-$ tā, lai saīsinātā izteiksme dalītos ar 4.

Tā kā sākotnējā izteiksmē varam ierakstīt $+$ vai $-$ pirms skaitļiem $3, 6$ vai 9 neizmainot izteiksmes dalāmību ar 3, un ir 4 pozīcijas, kur varam to izdarīt, tad ir kopā $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$ veidi kā izvēlēties zīmes.

Tas nozīmē, ka kopā ir $3\cdot 16=48$ veidi kā ierakstīt zīmes lai izteiksmes vērtība dalītos ar 3.

8. Dots, ka a, b un c - pozitīvi skaitļi un $abc=1$. Pierādīt, ka

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

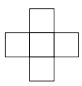
Risinājums: Vispirms izmantosim sakarību $abc=1$ lai pārveidotu izteiksmes:

$$\frac{b}{bc+b+1}=\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{bc+b+1}=\frac{ab}{abc+ab+a}=\frac{ab}{1+ab+a}=\frac{ab}{ab+a+1}$$
$$\frac{c}{ca+c+1}=\frac{ab}{ab}\cdot\frac{c}{ca+c+1}=\frac{abc}{a^2bc+abc+ab}=\frac{1}{a+1+ab}=\frac{1}{ab+a+1}$$

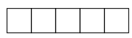
No tā seko, ka

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{ab+a+1}=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}=1$$

9. Katra bezgalīga rūtiņu režģa rūtiņa nokrāsota vienā no 5 krāsām tā, ka novietojot 4. zīmējumā attēloto figūru jebkur plaknē, tā, lai figūras rūtiņas sakristu ar režģa rūtiņām, tajā būtu sastopamas piecas krāsas.



4. zīm.

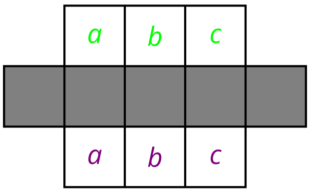


5. zīm.

Pierādīt, ka novietojot 5. zīmējumā attēloto figūru jebkur plaknē, tā, lai figūras rūtiņas sakristu ar režģa rūtiņām, arī tajā būs sastopamas visas piecas krāsas.

Risinājums: Sauksim 4. zīmējumā attēloto figūru par krustu, un 5. zīmējumā attēloto figūru par 5×1 taisnstūri.

Pieņemsim, ka kādā 5×1 taisnstūrī neparādās kāda no piecām krāsām, teiksim zila. Šī figūra iekrāsota pelēka 6. zīmējumā.



6. zīm.

Bet tad, katram no burtiem a, b, c, vismaz viena no divām ar šo burtu apzīmētajām rūtiņām būs zila, jo pretējā gadījumā būsim atraduši krustu bez zilās krāsas, pretruna. Bet pēc Dirihlē principa, vai nu ar zaļajiem vai violetajiem burtiem apzīmētajās rūtiņās vismaz divas būs zilas. Bet no tā seko, ka esam atraduši krustu, kurā ir divas zilas rūtiņas, un līdz ar to nevar parādīties visas piecas krāsas, pretruna.

Tātad katrā 5×1 taisnstūrī var atrast visas 5 krāsas.

10. Vai eksistē tāds divciparu skaitlis n, kas nebeidzas ar nulli, ka starp skaitļa pirmo un pēdējo ciparu ierakstot patvaļīgu skaitu nuļļu, jaunais skaitlis
(a) vienmēr dalās ar sākotnējo skaitli n;
(b) nekad nedalās ar sākotnējo skaitli n;
(c) dažreiz dalās un dažreiz nedalās ar sākotnējo skaitli n?

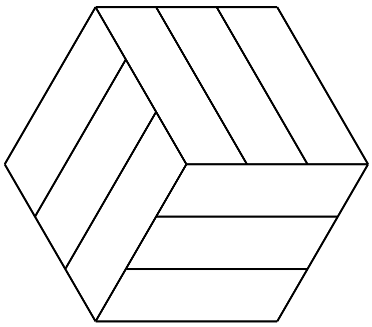
Risinājums:

(a) Piemēram, 15 der, jo ievietojot pa vidu nulles, skaitlis vēl aizvien beigsies ar 5, līdz ar to dalīsies ar 5, un tā ciparu summa neizmainīsies un paliks 6, līdz ar to skaitlis dalīsies ar 3. Bet ja skaitlis dalās ar 3 un ar 5, tad tas dalās ar 15. Tātad ievietojot starp skaitļa 15 cipariem patvaļīgu skaitu nuļļu, beigās iegūtais skaitlis vienmēr dalās ar 15.

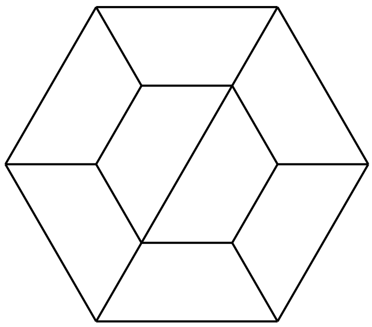
(b) Piemēram, 12 der, jo ievietojot patvaļīgu skaitu nuļļu, skaitļa pēdējie divi cipari būs "02", bet tas nozīmē, ka iegūtais skaitlis nedalās ar 4, jo tā pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis nedalās ar 4. Bet 12 dalās ar 4, tātad jauniegūtais skaitlis nekad nedalīsies ar 12.

(c) Piemēram, 11 der, jo $101 = 11 \cdot 9 + 2$ nedalās ar 11, bet $1001 = 11 \cdot 91$ dalās ar 11.

11. Sadalīt regulāru sešstūri a) 9 un b) 8 vienādās daļās.



7. zīm.



8. zīm.

Risinājums: Viens iespējas dalījums a) gadījumā parādīts 7. zīmējumā un b) gadījumā 8. zīmējumā. Nav grūti pierādīt, ka daļas tiešām ir vienādas.