



Atvērtā kopa 2024

Piezīmes: Mērījumi no zīmējuma netiek skaitīti kā daļa no pierādījuma.

Ja netiek precizēts, tad visi skaitļi ir reāli.

Dažos uzdevumos, iespējams, ir vajadzīgas formulas, ko var viegli atrast internetā.

Visos uzdevumos, kur atbilde nav vesels skaitlis, kā atbilde tiek pieņemts tuvākais mazāks vesels skaitlis. Piemēram, ja atbilde ir π , tad Google Formā ir jāraksta 3, ja ir $-\pi$, tad -4.

Nebaidieties izmantot interneta resursus, piemēram, [desmos.com](https://www.desmos.com).

Uzdevumi nav sakārtoti pēc grūtības.

Pirmie 10 uzdevumi ir vērti katrs 2 punkti, pierādīšanas uzdevumi ir vērti 5 punkti.

Uzdevumi 11-12 klasēm

Uzdevumi uz atbildi

1.uzdevums Atrast visu naturālo skaitļu summu, kuri izsakāmi formā $\frac{m^2+mn+n^2}{mn-1}$, kur m un n ir naturāli skaitļi, turklāt $mn \neq 1$.

2.uzdevums Aprēķināt aritmētiskās progresijas pirmo 100 locekļu kvadrātu summu, ja zināms, ka to summa ir -1, bet locekļu ar pāra skaitli kā indeksu (pieņemot, ka pirmais loceklis ir ar indeksu 1) summa ir 1.

3.uzdevums Atrast visu naturālu skaitļu n summu, kuriem izpildās, ka $2n + 1$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, taču starp skaitļiem $2n + 2, 2n + 3, \dots, 3n + 2$ nav neviena naturāla skaitļa kvadrāta.

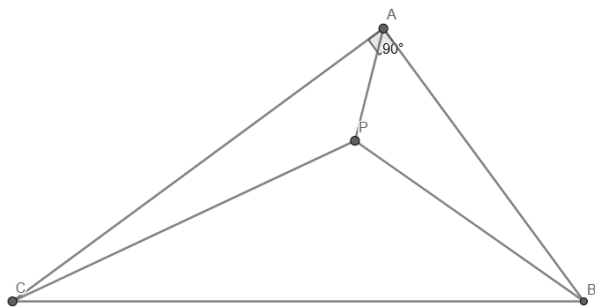
4.uzdevums Kastē ir 900 kārtis, numurētas no 100 līdz 999. Kārtis tiek nejauši izvilktas no kastes (neieliekot tās atpakaļ kastē) viena pēc otras, un katras izvilktās kārts ciparu summa ir uzrakstīta uz tāfeles. Kas ir mazākais daudzums kāršu, kas jāizvelk no kastes, lai nodrošinātu, ka vismaz 3 no uzrakstītajām summām ir vienādas?

5.uzdevums Atrast summu visiem naturāliem skaitļiem n , kuriem izpildās, ka $S_n = x^n + y^n + z^n$ ir konstanta vērtība visiem reāliem skaitļiem x, y, z , kuriem izpildās $xyz = 1$ un $x + y + z = 0$.

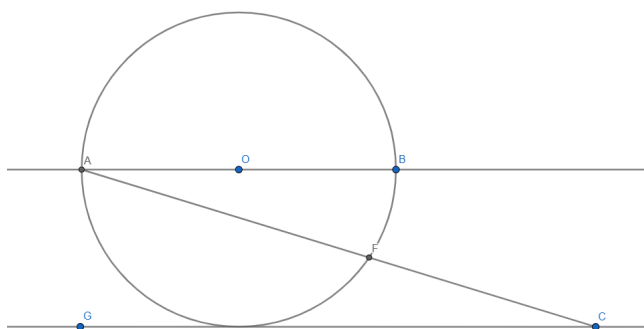
6.uzdevums Dota kopa *atvērta*, kurā ir 100 atšķirīgi naturāli skaitļi, turklāt jebkuri trīs skaitļi a, b un c (tie var nebūt dažādi), kas pieder kopai, veido ne-platleņķa trijstūri ar malu garumiem a, b un c . $S(\textit{atvērta})$ ir perimetru summa visiem iespējamajiem trijstūriem, kurus var iegūt no kopas *atvērta* skaitļiem. Atrast mazāko iespējamo $S(\textit{atvērta})$ vērtību.

7.uzdevums Dots funkcija f , ka $f(f(x)) = x^2 - 15x + 64$. Kāda ir $f(8)$ vērtība?

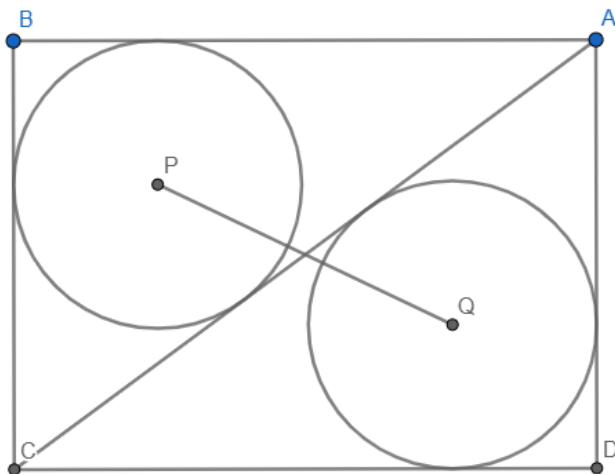
8.uzdevums Punkts P atrodas taisnleņķa trijstūrī ABC iekšpusē. $PA = 3$, $PB = 7$, $PC = 9$. Kāds ir lielākais iespējamais malas BC garums?



9.uzdevums Cik liels ir $\angle ACG$ grādos? Zināms, ka $AF = FC$, $AB \parallel CG$ un CG pieskaras riņķa līnijai ar centru O .



10.uzdevums Dots taisnstūris $ABCD$. Riņķa līnijas ar centru P un Q pieskaras attiecīgi nogriežņiem AB , BD , AC un AD , CD , AC . Zināms, ka $AD = 3$ un $CD = 4$. Kāds ir nogriežņa PQ garums?



Pierādīšanas uzdevumi

11.uzdevums Atrast visus veselos skaitļus (x, y) , kas apmierina vienādojumu

$$y^k = x^2 + x$$

kur k ir naturāls skaitlis, kas lielāks par 1.

12.uzdevums Atrast, pie kurām vesela skaitļa n vērtībām skaitlis $\sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ ir racionāls, un pamatot, ka citu nav.

13.uzdevums Dots, ka $ab > 0$ un $a + 3b = 1$. Atrast izteiksmes $\frac{2a+1}{3ab}$ minimālo vērtību un parādīt, kādām a, b vērtībām šo minimumu var sasniegt.

14.uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c , ka $a + b + c = 8$. Atrast izteiksmes $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 4} + \sqrt{c^2 + 9}$ minimālo vērtību un parādīt, kādām a, b, c vērtībām šo minimumu var sasniegt.

15.uzdevums Dots, ka četrstūra $ABCD$ apvilktais riņķa līnijas rādiuss ir 5. Punkts E ir AC un BD krustpunkts. $BE = DE$, $CD = \sqrt{2}DE$, $AC = 8$. Aprēķināt četrstūra $ABCD$ laukumu.

