



Atvērtā
kopa
2024

Uzdevumi 11-12 klasēm

Uzdevumi uz atbildi

1.uzdevums Atrast visu naturālo skaitļu summu, kuri izsakāmi formā $\frac{m^2+mn+n^2}{mn-1}$, kur m un n ir naturāli skaitļi, turklāt $mn \neq 1$.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka atbilde ir 11. Aplūkosim gadījumu, kur $m = n$, $k = \frac{m^2+mn+n^2}{mn-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Tad $k = \frac{3m^2}{m^2-1} = \frac{3m^2-3+3}{m^2-1} = 3 + \frac{3}{m^2-1}$. Tā kā $k \in \mathbb{N}$, $3 \geq m^2 - 1 \implies m \leq 2$. Pārbaudot $m = 1, 2$, iegūst, ka $k = 4$ ir vienīgā vērtība, kuru var iegūt, kad $m = n$.

Ja $m \neq n$, ievērosim, ka izteiksme ir simetriska attiecībā pret abiem locekļiem, tādēļ varam pieņemt, ka $m > n$. Pārveidojot vienādojumu, iegūst $m^2 - (k-1)mn + n^2 + k = 0$. Varam ievērot, ka, ja (m, n) ir atrisinājums vienādojumam un $n > (k-1)n - m > 0$, tad $(n, (k-1)n - m)$ arī ir atrisinājums. Nevienādību $(k-1)n - m > 0$ ir viegli pierādīt visiem gadījumiem: $k > \frac{m+n}{n}$, $\frac{m^2+mn+n^2}{mn-1} > \frac{m+n}{n}$, $n^3 > -m - n$. Līdzīgi varam pārveidot nevienādību $n > (k-1)n - m$: $k < \frac{m+2n}{n}$, $\frac{m^2+mn+n^2}{mn-1} < \frac{m+2n}{n}$, $m > n + \frac{3n}{n^2-1}$, kur $n > 1$.

Ja $3n < n^2 - 1$ jeb $n \geq 4$, tad, ja (m, n) būs atrisinājums, kur $m > n > 0$, tad arī (n, p) , kur $n > p > 0$ būs atrisinājums, tādējādi nonākot pie bezgalīgi mazām vērtībām, bet visiem pāriem jābūt veidotiem no naturāliem skaitļiem. Tātad $n \leq 3$. Ievietojam šīs n vērtības sākotnējā vienādojumā:

- $n = 1$, tad $m = 2$ vai $m = 4$ un $k = 7$.
- $n = 2$, tad $m = 4$ vai $m = 11$ un $k = 7$.
- $n = 3$, tad nav risinājumu.

Iegūstam, ka k var būt vienīgi 4 vai 7. Tātad uzdevuma atbilde ir $4 + 7 = 11$.

2.uzdevums Aprēķināt aritmētiskās progresijas pirmo 100 locekļu kvadrātu summu, ja zināms, ka to summa ir -1, bet locekļu ar pāra skaitli kā indeksu (pieņemot, ka pirmais loceklis ir ar indeksu 1) summa ir 1.

Atrisinājums. Aplūkosim aritmētisko progresiju $a, a + d, a + 2d, \dots, a + 99d$. Tādā gadījumā jāatrod $S = a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 + \dots + (a + 99d)^2 =$

$= 100a^2 + 2ad(1 + 2 + \dots + 99) + d^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2)$ Pēc dotā varam iegūt sistēmu
$$\begin{cases} (a+a+99d)50=-1 \\ (a+d+a+99d)25=1 \end{cases}$$
, kuras atrisinājums ir $a = -2,98$, $d = 0,06$. Pārējais uzdevums ir

vienkārši aprēķini: $1 + 2 + 3 + \dots + 99 = 4950$, $1^2 + 2^2 + \dots + 99^2 = 328350$. Iegūst beigu rezultātu $S = 299,98$, kas, pēc olimpiādes nosacījumiem tiek noapaļots uz 299.

3.uzdevums Atrast visu naturālu skaitļu n summu, kuriem izpildās, ka $2n + 1$ ir naturāla skaitļa kvadrāts, taču starp skaitļiem $2n + 2, 2n + 3, \dots, 3n + 2$ nav neviena naturāla skaitļa kvadrāta.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka $x \in \mathbb{N}$ ir uzdevuma atrisinājums. Tad $x^2 = 2n + 1$ un $x^2 \leq 3n + 2 < (x + 1)^2$. No pirmā vienādojuma iegūst, ka $n = \frac{x^2 - 1}{2}$, kuru ievieto iegūtajā nevienādībā: $x^2 \leq \frac{3x^2 + 1}{2} < x^2 + 2x + 1$ jeb $2x^2 \leq 3x^2 + 1 < 2x^2 + 4x + 2$. Atrisinot kvadrātnevienādības, iegūstam, ka $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Pārbaudām vērtības, ievietojot sākotnējā vienādībā, un iegūstam, ka vienīgi $x = 3$ izpilda uzdevuma nosacījumus, tātad vienīgā n vērtība ir $n = \frac{3^2 - 1}{2} = 4$.

4.uzdevums Kastē ir 900 kārtis, numurētas no 100 līdz 999. Kārtis tiek nejauši izvilktas no kastes (neieliekot tās atpakaļ kastē) viena pēc otras, un katras izvilktās kārts ciparu summa ir uzrakstīta uz tāfeles. Kas ir mazākais daudzums kāršu, kas jāizvelk no kastes, lai nodrošinātu, ka vismaz 3 no uzrakstītajām summām ir vienādas?

Atrisinājums. Pastāv 27 dažādas ciparu summas (no 1 līdz 27), turklāt 1 un 27 var iegūt tikai vienā veidā (100 un 999). Sliktākajā gadījumā, izvelkot 52 kārtis, divām no tām ciparu summas būs attiecīgi 1 un 27, bet 50 kārtīm ciparu summas būs starp 2 un 26 (ieskaitot), turklāt katra no šīm ciparu summām parādās divreiz. Izvelkot 53. kārti, kāda no ciparu summām parādīsies 3. reizi.

5.uzdevums Atrast summu visiem naturāliem skaitļiem n , kuriem izpildās, ka $S_n = x^n + y^n + z^n$ ir konstanta vērtība visiem reāliem skaitļiem x, y, z , kuriem izpildās $xyz = 1$ un $x + y + z = 0$.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka z ir zināms. Ievietojot dotajos vienādojumos, varam iegūt, ka $x + y = -z$ un $xy = \frac{1}{z}$ jeb kvadrātvienādojumu $p^2 - pz + \frac{1}{z} = 0$, kura atrisinājums ir $x, y = \frac{-z \pm \sqrt{z^2 - \frac{4}{z}}}{2}$. Viens no iespējamajiem risinājumiem ir $z = \sqrt[3]{4}$ un $x = y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Ievērosim, ka, ja n ir pāra skaitlis, varam izvēlēties arbitrāri lielu z , arbitrāri lielu x ar pretējo zīmi un proporcionāli mazu, negatīvu y , lai izpildītos gan $x + y + z = 0$, gan $xyz = 1$, un tad $x^n + y^n + z^n$ vērtība nebūs vienāda ar gadījumu, kad $z = \sqrt[3]{4}$ un $x = y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, tātad S_n nebūs konstants. Tātad n nevar būt pāra skaitlis.

Lemma. Visiem naturāliem nepāra skaitļiem $n \geq 3$, kur z ir konstanta lieluma, $x^n + y^n$ var izteikt kā n -tās pakāpes polinomu, kas atkarīgs no z , turklāt tā n -tās pakāpes loceklim ir koeficients -1 , $n - 1$ un $n - 2$ pakāpes locekļiem ir koeficients 0 , bet $n - 3$ pakāpes loceklim - koeficients n . Piemēram:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = -z^3 + 3.$$

Ja lemma ir patiesa skaitlim n , tā ir patiesa arī skaitlim $n + 2$:

$$x^{n+2} + y^{n+2} = (x + y)^{n+2} - \sum_{u=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n+2}{u} x^u y^u (x^{n+2-2u} + y^{n+2-2u}),$$

kur rezultātā:

$$x^{n+2} + y^{n+2} = -z^{n+2} - \frac{n+2}{z}(x^n + y^n) + \sum_{u=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n+2}{u} \frac{x^{n+2-2u} + y^{n+2-2u}}{z^u}.$$

Pēc indukcijas hipotēzes secinām, ka locekļiem pie $u \geq 2$ nebūs pakāpes, kas lielāka par $n - 4$, turklāt augstākās pakāpes loceklis būs $-\frac{n+2}{z}(-z^n) = (n+2)z^{n-1}$. Ja nepāra skaitlis $n \geq 5$, varam izvēlēties $z \rightarrow \infty$, jo tad $x^n + y^n + z^n \rightarrow nz^{n-3} \rightarrow \infty$. Tātad S_n nav konstants, ja $n \geq 5$ vai ja n ir pāra skaitlis. Ja $n = 1$, $S_1 = 0$, ja $n = 3$, $S_3 = 3$ (pēc aplūkotā piemēra indukcijā). Tātad atbilde ir $1+3=4$.

6. uzdevums Ar n apzīmēsim kopas *atvērta* mazāko elementu, bet m - lielāko. Tā kā kopā ir simts dažādu elementu, $n + 99 \leq m$. Lai vienādsānu trijstūris ar malām n , n , m nebūtu platleņķa, jāizpildās $m^2 \leq 2n^2$; ņemot mazāko m vērtību, $m = n + 99$, iegūstam:

$$(n + 99)^2 \leq 2n^2.$$

Atrisinājums.

$$n^2 - 198n - 99^2 \geq 0 \iff n \geq 99 + \sqrt{99^2 + 99^2} \iff n \geq 99(1 + \sqrt{2}) \iff n \geq 240.$$

Ja $n < 240$, tad kopa neatbilst priekšraksta nosacījumam, jo:

$$m^2 = (n + 99)^2 > 2n^2,$$

un trijstūris ar malām n , n , m būs platleņķa. Kopa ar mazākajiem skaitļiem, kuriem izpildās šie nosacījumi:

$$atvērta = \{240, 241, 242, \dots, 339\}.$$

Jebkurai citai kopai, kas atbilst nosacījumiem, elementi būs attiecīgi vienādi vai lielāki par šīs kopas elementiem. Secinām, ka šī kopa dos mazāko $S(atvērta)$.

Trijstūru skaits ir $100^3 = 1000000$, tātad kopējais malu skaits būs 3000000; No tiem būs 30 000 ar 240 garumu, 30 000 ar 241 utt. Tad

$S(atvērta) = 30000 * (240 + 241 + \dots + 339) = 30000 * \frac{100 * (240 + 339)}{2} = 868500000$ vienības. Šī ir minimālā $S(atvērta)$ vērtība, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

7.uzdevums Dota funkcija f , ka $f(f(x)) = x^2 - 15x + 64$. Kāda ir $f(8)$ vērtība?

Atrisinājums. Ievērojam, ka

$$f(f(8)) = 8^2 - 15 \cdot 8 + 64 = 8$$

kas nozīmē, ka

$$f(8) = f(f(f(8)))$$

Tāču pēc dotās formulas

$$f(f(f(8))) = f(8)^2 - 15 \cdot f(8) + 64$$

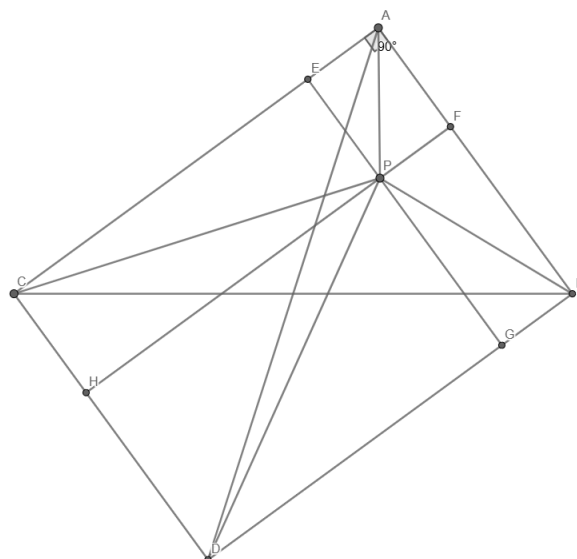
Līdz ar to

$$f(8) = f(8)^2 - 15 \cdot f(8) + 64$$

$$0 = f(8)^2 - 16 \cdot f(8) + 64$$

$$0 = (f(8) - 8)^2$$

$$f(8) = 8$$



8.uzdevums Punkts P atrodas taisnleņķa trijstūra ABC iekšpusē. $PA = 3$, $PB = 7$, $PC = 9$. Kāds ir lielākais iespējamais malas BC garums?

Atrisinājums. Papildinām zīmējumu, lai mums būtu taisnstūris $ABCD$. PE, PF, PG, PH ir attiecīgi augstumi no punkta P pret taisnstūra malām. Pēc pitagora teorēmas, mums ir

$$PA^2 = PE^2 + PF^2$$

$$PB^2 = PF^2 + PG^2$$

$$PC^2 = PE^2 + PH^2$$

$$PD^2 = PH^2 + PG^2$$

Ievērojam, ka varam aprēķināt PD :

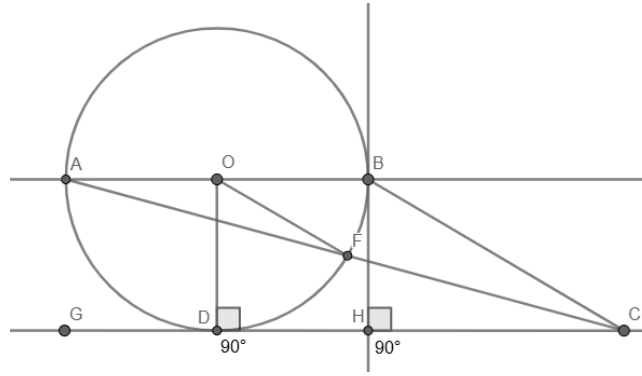
$$\begin{aligned} PD^2 + PA^2 &= PH^2 + PG^2 = PC^2 - PE^2 + PB^2 - PF^2 + \\ &+ PE^2 + PF^2 = PC^2 + PB^2 = 81 + 49 = 130 \\ PD^2 &= 130 - PA^2 = 121 \\ PD &= 11 \end{aligned}$$

Pēc trijstūra nevienādības no trijstūra APD iegūstam, ka $AD < PA + PD = 14$. Taču šoreiz punkts P var atrasties uz nogriežņa AD , kas nozīmē, ka var sasniegt vienādību un $AD \leq PA + PD = 14$

Tā kā gan BC , gan AD ir taisnstūra diagonāles, tad $BC = AD \leq 14$. Līdz ar to lielākais iespējamais malas BC garums ir 14.

9.uzdevums Cik liels ir $\angle ACG$ grādos? Zināms, ka $AF = FC$, $AB \parallel CG$ un CG pieskaras riņķa līnijai ar centru O .

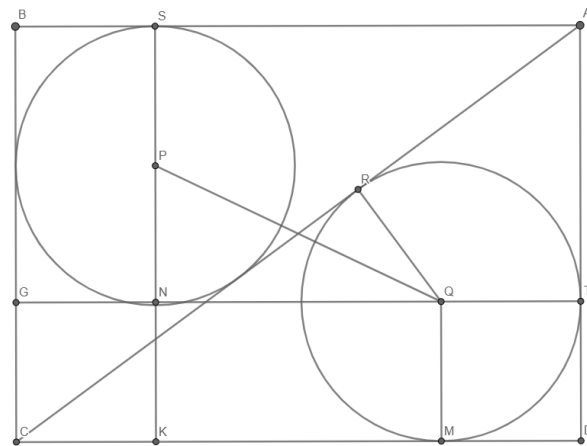
Atrisinājums. Papildinām zīmējumu. $BH \perp CG$, $OD \perp CG$. Ievērojam, ka no $AO = OB$ (rādiusi) un $AF = FC$ varam secināt, ka trijstūrī ABC , OF ir viduslīnija. Līdz ar to $BC = 2OF = 2r$, kur r ir riņķa līnijas rādiuss. Skaidrs, ka $BH = OD = r$ kā attālums starp paralēlām taisnēm. Līdz ar to trijstūrī BCH mums ir $BC = 2r$ un $BH = r$, kas nozīmē,



ka leņķis $BCH = 30^\circ$.

Tālāk redzam, ka $BC = AB = r$, līdz ar to $\angle BCA = \angle BAC$. Taču $\angle BAC = \angle ACG$ kā iekšējie šķērsleņķi, līdz ar to $\angle BCA = \angle ACG = \frac{1}{2} \cdot \angle BCH = 15^\circ$

10.uzdevums Dots taisnstūris $ABCD$. Riņķa līnijas ar centru P un Q pieskaras attiecīgi nogriežņiem AB , BD , AC un AD , CD , AC . Zināms, ka $AD = 3$ un $CD = 4$. Kāds ir nogriežņa PQ garums?



Atrisinājums. Papildinām zīmējumu. $QR \perp AC$, $QT \perp AD$, $QM \perp CD$, $PS \perp AB$. SP krusto CD punktā K , QT punktā N , QT krusto BC punktā G . Ievērojam, ka pēc dotā R, T, M, S ir pieskaršanās punkti.

Apzīmējam riņķa līnijas Q rādiusu ar r . Pēc simetrijas secinām, ka arī riņķa līnijas P rādiuss ir r . Ievērojam, ka $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = 5$. Taču $AC = AR + CR = AT + CM = 3 - r + 4 - r$, tad mums ir

$$3 - r + 4 - r = 5$$

$$2r = 2$$

$$r = 1$$

Tā kā $SP \perp QT$, tad trijstūris PNQ ir taisnleņķa. Līdz ar to

$$\begin{aligned}PQ &= \sqrt{NP^2 + NQ^2} \\PQ &= \sqrt{(3 - 2r)^2 + (4 - 2r)^2} \\PQ &= \sqrt{1^2 + 2^2} \\PQ &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

Kā pareizā atbilde tiek pieņemta 2.

Pierādīšanas uzdevumi

11.uzdevums Atrast visus veselos skaitļus (x, y) , kas apmierina vienādojumu $y^k = x^2 + x$, kur k ir naturāls skaitlis, kas lielāks par 1.

Atrisinājums. Ievērosim, ka $y^k = x^2 + x = x(x+1)$ jeb divu secīgu veselu skaitļu reizinājums. Ja $x = 0$ vai $x = -1$, iegūstam, ka $y^k = 0$, $y = 0$. Iegūstam divus atrisinājuma pārus: $(-1; 0)$ un $(0; 0)$. Aplūkosim gadījumu, kad $x > 0$: Lielākais kopīgais dalītājs x un $x + 1$ ir 1, tādēļ varam secināt, ka gan x , gan $x + 1$ jābūt izsakāmam kā kādam naturālam skaitlim k -tajā pakāpē (ja ne, šo skaitļu reizinājumam būs kāds pirmskaitlis, kurš nav pakāpē, kas dalās ar k , tātad reizinājums pats nevarēs būt k -tajā pakāpē). Apzīmēsim $a^k = x$ un $b^k = x + 1$, $a < b$; $a, b \in \mathbb{N}$. Ievērosim, ka tad $b^k - a^k = x + 1 - x = 1$. Un tomēr, pat paņemot izteiksmes minimālās vērtības: $b = 2$, $a = 1$ un $k = 2$, šī vienādība nevar izpildīties. Tā kā izteiksme ir eksponenciāla, palielinot b un a , to starpība augs, līdzīgi kā palielinot k vērtību. Tātad risinājumu, kad $x > 0$, nav.

Ievērosim, ka, ja $x < -1$, tad varam izteikt $x = -(z + 1) = -z - 1$, kur z ir naturāls skaitlis. Tādā gadījumā $x(x+1) = -(z+1)(-z-1+1) = -(z+1)(-z) = z(z+1)$, kas atbilst mūsu jau aplūkotajam gadījumam. Varam secināt, ka $(-1; 0)$ un $(0; 0)$ ir vienīgie uzdevuma risinājumi.

12.uzdevums Atrast, pie kurām vesela skaitļa n vērtībām skaitlis $\sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ ir racionāls, un pamatot, ka citu nav.

Atrisinājums. Tā kā skaitlis n ir vesels, arī skaitlis $3n^2 + 2n + 2$ ir vesels. Vesela skaitļa kvadrātsakne ir racionāla tad un tikai tad, ja šis skaitlis ir izsakāms kā naturāla skaitļa kvadrāts (vai 0). Tātad varam apgalvot, ka $3n^2 + 2n + 2 = a^2$, kur $a \in \mathbb{N}_0$. Aplūkosim, kādus atlikumus var iegūt naturāls skaitlis, un kādus atlikumus iegūs šī skaitļa kvadrāts, dalot ar 4:

a	mod 4	a^2	mod 4
0		0	
1		1	
2		0	
3		1	

Tātad a^2 atlikums, dalot ar 4, var būt 0 vai 1. Aplūkosim iespējamās $3n^2 + 2n + 2$ atlikumus, dalot ar 4:

n	mod 4	$(3n^2 + 2n + 2)$	mod 4
0		2	
1		7	mod 4 = 3
2		18	mod 4 = 2
3		35	mod 4 = 3

Pēc iegūtā varam secināt, ka $3n^2 + 2n + 2$ nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts (vai 0), tādēļ skaitlis $\sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ būs iracionāls pie visām veselayām skaitļa n vērtībām.

13.uzdevums Dots, ka $ab > 0$ un $a + 3b = 1$. Atrast izteiksmes $\frac{2a+1}{3ab}$ minimālo vērtību un parādīt, kādām a, b vērtībām šo minimumu var sasniegt.

Atrisinājums. Ievērojam, ka varam pārveidot doto vienādību:

$$\frac{2a+1}{3ab} = \frac{2a+a+3b}{3ab} = \frac{3a+3b}{3ab} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Redzam, ka no $ab > 0$ varam secināt, ka abiem skaitļiem ir vienādas zīmes. Taču, ja abi skaitļi ir negatīvi, tad $a + 3b < 0$ un neizpildās $a + 3b = 1$. Līdz ar to abi skaitļi ir pozitīvi.

Izmantojam Koši nevienādību:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + 3b) &\geq \left(\sqrt{\frac{1}{a} \cdot a} + \sqrt{\frac{1}{b} \cdot 3b}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + 3b) &\geq (1 + \sqrt{3})^2 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\geq 1 + 2\sqrt{3} + 3 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\geq 4 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Mēs zinām, ka vienādību var sasniegt tad un tikai tad, kad $\frac{a}{1} = \frac{3b}{1}$, jeb $a^2 = 3b^2 \implies a = \sqrt{3}b$. Ievietojot šo sakarību vienādībā $a + 3b = 1$, iegūstam, ka

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \\ b &= \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

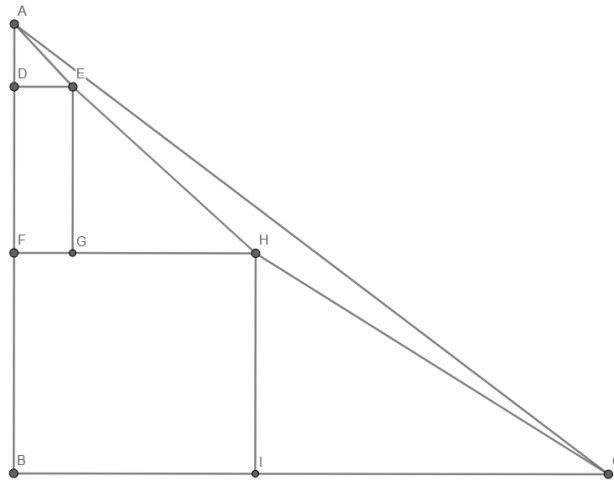
Pārbaudot, der.

14.uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c , ka $a + b + c = 8$. Atrast izteiksmes $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 4} + \sqrt{c^2 + 9}$ minimālo vērtību un parādīt, kādām a, b, c vērtībām šo minimumu var sasniegt.

Atrisinājums. Apskatām sekojošu konstrukciju. Trijstūris ABC ir taisnleņķa. $DE \parallel FH \parallel BC$, $HI \parallel EG \parallel AB$. $AD = 1, EG = DF = 2, HI = FB = 3, DE = a, GH = b, IC = c$. Ievērojam, ka tādā gadījumā $BC = DE + GH + IC = a + b + c = 8$, kas nozīmē, ka $AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Redzam, ka

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{a^2 + 1} \\ EH &= \sqrt{b^2 + 4} \\ HC &= \sqrt{c^2 + 9} \end{aligned}$$



Kā arī

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 4} + \sqrt{c^2 + 9} = AE + EH + HC \geq AC = 10$$

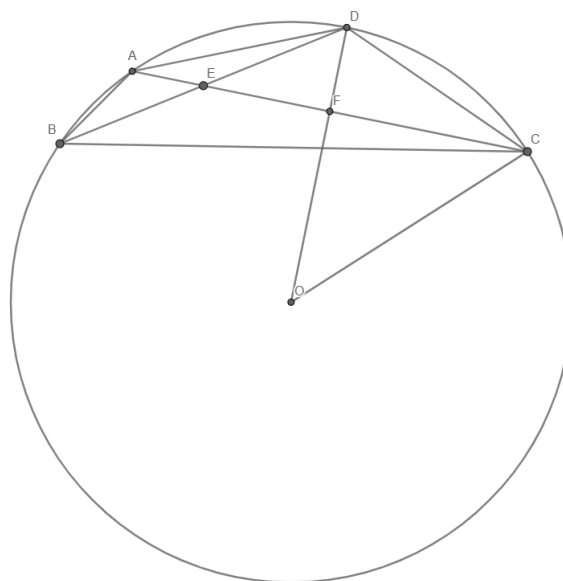
Šo minimumu varam sasniegt, kad punkti A, E, H, C atrodas uz vienas taisnes. Tādā gadījumā

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4} \implies a = DE = \frac{4 \cdot AD}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{EG}{GH} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4} \implies b = GH = \frac{4 \cdot AD}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{HI}{IC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4} \implies c = IC = \frac{4 \cdot AD}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

15.uzdevums Dots, ka četrstūra $ABCD$ apvilktais riņķa līnijas rādiuss ir 5. Punkts E ir AC un BD krustpunkts. $BE = DE$, $CD = \sqrt{2}DE$, $AC = 8$. Aprēķināt četrstūra $ABCD$ laukumu.



Atrisinājums. Ievērojam, ka, tā kā E ir BD viduspunkts, tad trijstūriem EDC un BEC ir vienādi laukumi, jo tiem ir tas pats augstums un pamats. Līdzīgi, arī trijstūriem AEB un AED ir vienādi laukumi. Līdz ar to četrstūra $ABCD$ laukums

$$S_{ABCD} = S_{EDC} + S_{BEC} + S_{AEB} + S_{AED} = 2(S_{EDC} + S_{AED}) = 2S_{ADC}$$

Tālāk redzam, ka $CD^2 = DE \cdot DB$, jo $CD = \sqrt{2}DE$. Mums ir

$$\frac{CD}{DB} = \frac{DE}{CD}$$

Tā kā $\angle CDB$ ir kopīgs leņķis, tad trijstūris CDE ir līdzīgs trijstūrim BDC , no kura seko, ka $\angle DCA = \angle DBC$. Tā kā abi leņķi ir ievilkti, tad loki, uz kuriem tie balstās, ir vienādi, jeb $CD = AD$. Līdz ar to punkts D atrodas uz nogriežņa AC vidusperpendikula. Tā kā arī riņķa līnijas centrs pēc definīcijas atrodas uz nogriežņa AC vidusperpendikula, tad mums ir $DO \perp AC$ un to krustpunkts F ir arī AC viduspunkts. No taisnleņķa trijstūra OFC varam aprēķināt OF pēc Pitagora teorēmas:

$$\begin{aligned} OC^2 &= FC^2 + FO^2 \\ FO^2 &= OC^2 - FC^2 = 25 - 16 = 9 \\ FO &= 3 \end{aligned}$$

Līdz ar to

$$S_{ABCD} = 2S_{ADC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DF = 8 \cdot (5 - 3) = 16$$