



## Uzdevumi 7-8 klasēm

### Uzdevumi uz atbildi

**1.uzdevums** *Kāda ir skaitļa  $10^{2024} - 2024$  ciparu summa?*

**Atrisinājums.** Kāpinot skaitli 10 2024.pakāpē, tiek iegūts šāds skaitlis:

$$100 \dots 000000$$

kur aiz vieninieka seko 2024 nulles. No tā atņemot 2024, iegūsim šādu skaitli:

$$999 \dots 9997976$$

kur aiz 2020 devītniekiem seko skaitlis 7976. Līdz ar to skaitļa  $10^{2024} - 2024$  ciparu summa ir  $9 \cdot 2020 + 7 + 9 + 7 + 6 = 18209$ .

**2.uzdevums** *Kāds ir lielākais četr ciparu skaitlis, kuram ir tik pat daudz dalītāju, cik ir skaitlim 2024?*

**Atrisinājums.** Vispirms jānoskaidro, cik dalītāju ir skaitlim 2024. Sadalot šo skaitli pirmreizinātājos, iegūstam, ka

$$2024 = 2^3 \cdot 11^1 \cdot 23^1$$

Lai aprēķinātu skaitļa dalītāju skaitu, izmantosim sekojošu formulu: Ja  $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_m^{n_m}$ , tad dalītāju skaits ir  $d = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_m + 1)$ . Līdz ar to

$$d_{2024} = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Tālāk meklējam piemērotu četr ciparu skaitli, sākot no 9999 uz leju, jo gribam, lai šis skaitlis būtu pats lielākais. Izmantojot interneta resursus, varam atrast, ka lielākais šāds skaitlis ir 9982.

**3.uzdevums** *Skaitlis  $a$  ir naturāls skaitlis, un  $b$  ir skaitlis, kuru iegūst, skaitļa  $a$  ciparus uzrakstot apgrieztā secībā, savukārt  $c$  ir skaitļa  $a$  ciparu summa. Nosaki visu to trīsciparu skaitļu  $a$  summu, kuri apmierina vienādojumu  $2b + c = a$ .*

**Atrisinājums.** Apzīmējam trīsciparu skaitli  $a$  kā  $\overline{xyz}$ . Tā kā  $x$  ir simti,  $y$  ir desmiti un  $z$  ir vieni, tad  $\overline{xyz}$  varam pārveidot kā  $100x + 10y + z$ . Tā kā  $b$  ir apgriezts skaitlis  $a$ , tad to varam apzīmēt ar  $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$ .  $c$  ir skaitļa  $a$  ciparu summa jeb  $x + y + z$ . Ievietojam šos skaitļus dotajā vienādībā:

$$\begin{aligned} 2b + c &= a \\ 2(100z + 10y + x) + x + y + z &= 100x + 10y + z \\ 200z + 20y + 2x + x + y + z &= 100x + 10y + z \\ 200z + 11y - 97x &= 0 \end{aligned}$$

Tā kā  $x$  nevar būt 0, tad ir vajadzīgs iziet cauri visiem gadījumiem, kad  $x$  ir cipars no 1 līdz 9. Apskatot visus gadījumus, varam secināt, ka tāds trīsciparu skaitlis neeksistē.

**4.uzdevums** Cik daudz skaitļu no 1 līdz 1000 apmierina šādu īpašību: dalot ar 2, atlikums ir 1, dalot ar 3, atlikums ir 2 un dalot ar 5, atlikums ir 4?

**Atrisinājums.** Varam no sākuma apskatīt mazākos skaitļus, sākot no 1. Iegūstam, ka mazākais skaitlis, kas apmierina prasīto, ir 29. Turpinot, varam pamanīt, ka visiem skaitļiem  $x$ , kas apmierina prasīto, izpildās sakarība  $x = 29 + 30a$ , kur  $a$  ir nenegatīvs vesels skaitlis. Tā kā  $x < 1000$ , tad mums ir lineāra nevienādība

$$\begin{aligned} 29 + 30a &< 1000 \\ 30a &< 971 \\ a &< 32,36 \end{aligned}$$

Līdz ar to  $a$  var būt tikai no 0 līdz 32, kas nozīmē, ka mums der tieši 33 skaitļi.

PS. Iespējams, ka kāds ir pamanījis, ka  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ . Nomainot kādu dalītāju uz kādu citu pirmskaitli, piemēram, 5 vietā 7, tad mūsu sakarība kļūst par  $x = 11 + 42a$ , un  $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ . Šo sakarību sauc par Ķīniešu atlikumu teorēmu.

**5.uzdevums** Kārļa rūpnīca ražo padārgas dzērienu pudeles. Lai iedarbinātu iekārtas, viņam katru dienu ir jāiztērē 50 eiro. Lai ražotu vienu pudeli, viņam ir vajadzīga 30 eiro vērtas izejvielas. Katru dienu viņš var pārdot pirmo pudeli par 100 eiro, otro par 95 eiro, trešo par 90 eiro un tā tālāk. Kāda ir Kārļa lielākā iespējama peļņa?

**Atrisinājums.** Skaidrs, ka Kārlim ir izdevīgi ražot vēl papildus pudeli, ja viņš to var pārdot par augstāku cenu nekā pudeles izmaksa 30 eiro. Tā kā katru nākamo pudeli viņš var pārdot par 5 eiro mazāk, tad 14. pudeli viņš var pārdot tikai par  $100 - 5(14 - 1) = 35$  eiro. 15. pudeli viņš var pārdot tikai par 30 eiro, kas nedod peļņu. Līdz ar to Kārlim ir izdevīgi ražot tieši 14 pudeles. Viņa kopējais ienākums ir  $100 + 95 + \dots + 35 = \frac{(100+35)14}{2} = 945$  eiro, taču viņa kopējā izmaksa ir  $50 + 30 \cdot 14 = 470$  eiro. Lielākā iespējama peļņa ir  $945 - 470 = 475$  eiro.

**6.uzdevums** Doti trijstūra malas garumi  $a$ ,  $b$  un  $c$ , kur visi skaitļi ir naturāli un  $a > b > c$ . Zināms, ka  $a + b + c = 2024$ , kāda ir maksimālā  $a + 2c$  vērtība?

**Atrisinājums.** Tā kā  $b$  ir naturāls un  $b > c$ , tad  $b \geq c + 1$ . Un

$$\begin{aligned} 2024 &= a + b + c \geq a + (c + 1) + c \\ 2023 &\geq a + 2c \end{aligned}$$

Redzam, ka šo vērtību patiešām var sasniegt pie  $a = 1011$ ,  $b = 507$ ,  $c = 506$ .

**7.uzdevums** Dots, ka  $a^5 + a + 1 = 0$ , aprēķiniet  $a^3 - a^2$  vērtību.

**Atrisinājums.** Pārveidosim doto vienādību:

$$\begin{aligned} a^5 + a + 1 &= 0 \\ a^5 + a^4 + a^3 - a^4 - a^3 - a^2 + a^2 + a + 1 &= 0 \\ a^3(a^2 + a + 1) - a^2(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) &= 0 \\ (a^3 - a^2 + 1)(a^2 + a + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Tā kā  $a^2 + a + 1 = a^2 + a + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ , tad

$$(a^3 - a^2 + 1)(a^2 + a + 1) = 0 \implies a^3 - a^2 + 1 = 0$$

kas nozīmē ka  $a^3 - a^2 = -1$ .

PS. To, ka  $a^2 + a + 1 > 0$ , var arī nolasīt no funkcijas grafika, to uzzīmējot desmos.com.

**8.uzdevums** Maksimam ir 2024 konfektes. Uvis katru minūti vai nu paņem pusi no konfekšiem (ja konfekšu skaits ir pāra skaitlis), vai tieši 9 konfektes. Kāds ir mazākais iespējamais konfekšu skaits, kas paliek Maksimam, kad Uvis vairs nevar ņemt konfektes pēc minētajiem noteikumiem?

**Atrisinājums.** Pierādīsim, ka mazākais konfekšu skaits ir 1. Skaidrs, ka to var sasniegt šādā veidā:

$$2024 \rightarrow 1012 \rightarrow 506 \rightarrow 253$$

Tā kā 252 dalās ar 9, tad 28 reizes atņemot 9 konfektes, Maksimam paliks tieši 1 konfekte.

Tagad pierādīsim, ka Uvis nevar paņemt visas konfektes, jeb Maksimam nevar palikt 0 konfekšu. Redzam, ka skaitlis 2024 nedalās ar 3. Ja skaitlis nedalās ar 3, tad, dalot šo skaitli ar 2, jaunais skaitlis arī nedalīsies ar 3. Līdzīgi, arī no šī skaitļa atņemot 9, jaunais skaitlis nedalīsies ar 3. Taču skaitlis 0 dalās ar 3. Un, ja Maksimam paliktu 0 konfekšu, tad būtu pretrunā ar to, ka, veicot atļautās darbības, Maksima konfekšu skaits nekad nedalās ar 3. Līdz ar to Maksimam nevar palikt tieši 0 konfekšu.

**9.uzdevums** Uz tāfeles ir uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 100. Edgars katru minūti nodzēš divus skaitļus  $a$  un  $b$ , un to vietā uzraksta skaitli  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Kāds ir lielākais iespējamais skaitlis, kas paliek uz tāfeles pēc 99 minūtēm?

**Atrisinājums.** Parādīsim, ka skaitlis, kas paliek uz tāfeles pēc 99 minūtēm, nav atkarīgs no Edgara izvēlētajiem skaitļiem, un tas vienmēr būs  $\sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + 100^2} = \sqrt{338350} = 581,6$ . Līdz ar to pieņemtā atbilde ir 581.

Redzam, ka uz tāfeles uzrakstīto skaitļu kvadrātu summa ir invariants. Kad tiek nodzēsti skaitļi  $a$  un  $b$  un uzrakstīts skaitlis  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , tad kopējā kvadrātu summa nemainās, jo  $a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$ . Līdz ar to, ja pēdējais skaitlis ir  $x$ , tad mums ir

$$x^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2 \implies x = \sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + 100^2}$$

Pēc kvadrātu summas formulas mums ir  $1^2 + 2^2 + \dots + 100^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 338350$ , līdz ar to  $x = 581,6$ .

**10.uzdevums** *Skaidrs, ka, jo vairāk ir desmitnieku vienā priekšmetā, jo mazāka ir vienas sliktas atzīmes ietekme. Jēkabam šobrīd ir tikai desmitnieki matemātikā. Vismaz cik daudz desmitnieku ir Jēkabam, ja, iegūstot vienu piecinieku, viņa vidējā atzīme nokrita mazāk nekā 0,03?*

**Atrisinājums.** Apzīmēsim Jēkaba desmitnieku skaitu ar  $x$ . Varam sastādīt sekojošu nevienādību:

$$10 - \frac{10x + 5}{x + 1} < 0,03$$

kur  $\frac{10x+5}{x+1}$  apzīmē jauno vidējo atzīmi – dalot kopējo atzīmju summu  $10x + 5$  ar atzīmju skaitu  $x + 1$ . Atrisināsim nevienādību:

$$\begin{aligned} 10 - \frac{10x + 5}{x + 1} &< 0,03 \\ \frac{10x + 5}{x + 1} &> 9,97 \\ 10x + 5 &> 9,97x + 9,97 \\ 0,03x &> 4,97 \\ x &> 165,7 \end{aligned}$$

Tā kā  $x > 165,7$ , tad Jēkabam ir vismaz 166 desmitnieki.

PS. Nevienādību var atrisināt, izmantojot desmos.com.

## Pierādīšanas uzdevumi

**11.uzdevums** *Neapbrēķinot  $24^{20}$ , noteikt trūkstošo ciparu.*

$$24^{20} = 4019 * 88717840603673710821376$$

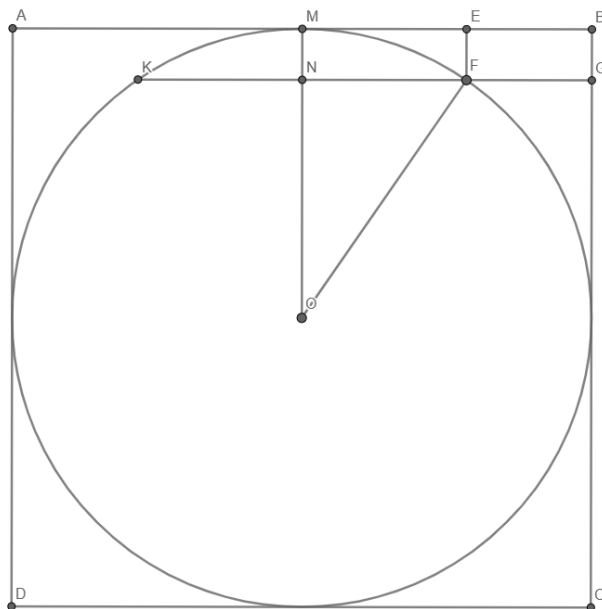
**Atrisinājums.** Trūkstošais cipars ir 9. Skaidrs, ka  $24^{20}$  dalās ar 9. Pēc dalāmības pazīmes mēs zinām, ka šī skaitļa ciparu summai arī ir jādalās ar 9. Apzīmējam trūkstošo ciparu ar  $x$  un summējam visus ciparus. Iegūstam, ka  $117 + x$  ir jādalās ar 9. Tā kā 117 dalās ar 9, tad  $x$  arī ir jādalās ar 9. Mums der cipari 0 un 9. Tālāk apskatām skaitļa dalāmību pēc 11. Skaidrs, ka šim skaitlim ir jādalās ar 11. Līdz ar to pēc skaitļa 11 dalāmības pazīmes, nepāra pozīcijas ciparu summas un pāra pozīcijas ciparu summas starpībai ir jādalās ar 11, kas nozīmē, ka  $69 - 48 - x = 21 - x$  dalās ar 11. Līdz ar to  $x = 0$  neder, tad  $x = 9$ .

**12.uzdevums** Skaitļi no 1 līdz 10000 tiek sadalīti divās grupās tā, ka vienā grupā ir skaitļi ar nepāra ciparu summu, un otrajā ir skaitļi ar pāra ciparu summu. Pierādīt, ka vienā grupā ir vairāk nekā 5000 skaitļu.

**Atrisinājums.** Ievērojām, ka katrus 10 skaitļus, sākot no 0, dod tieši 5 skaitļus ar pāra ciparu summu un 5 skaitļus ar nepāra ciparu summu. To var pierādīt sekojoši: katru divu sekojošu skaitļu, kuriem ir vienādi desmiti, ciparu summas starpība ir 1, kas nedalās ar 2. Tas nozīmē, ka šo skaitļu ciparu summas ir dažādas, dalot ar 2, jeb tām ir dažādas paritātes.

Līdz ar to starp skaitļiem no 0 līdz 9999, mums ir tieši 5000 skaitļu ar pāra ciparu summu, un 5000 skaitļu ar nepāra ciparu summu. Taču no šiem skaitļiem mums neder 0, un vēl papildus jāpievieno skaitli 10000, rezultātā mums ir 4999 skaitļi ar pāra ciparu summu, un 5001 skaitlis ar nepāra ciparu summu.

**13.uzdevums** Kāds ir riņķa līnijas garums, ja tā ir ievilkta kvadrātā  $ABCD$ , un taisnstūrim  $EFGB$   $BG = 1$ ,  $FG = 2$ ? Pieņemot, ka  $\pi = 3$ .



**Atrisinājums.** Pagarinām  $FG$  līdz  $K$ .  $M$  ir pieskaršanās punkts,  $O$  ir riņķa līnijas centrs,  $N$  ir  $OM$  un  $KG$  krustpunkts. Apzīmējam riņķa līnijas rādiusu ar  $r$ . Ievērojam, ka  $ON = OM - MN = r - 1$ ,  $NF = NG - FG = r - 2$ ,  $OF = r$ . Pēc Pitaroga teorēmas mums ir

$$\begin{aligned} ON^2 + NF^2 &= OF^2 \\ (r-1)^2 + (r-2)^2 &= r^2 \\ r^2 - 2r + 1 + r^2 - 4r + 4 &= r^2 \\ r^2 - 6r + 5 &= 0 \\ (r-1)(r-5) &= 0 \end{aligned}$$

Tā kā  $r = NG > FG = 2 \implies r > 2$ , tad rādiuss ir 5. Un riņķa līnijas garums ir  $C = 2\pi r = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

**14.uzdevums** Dots, ka  $a + b + c = 3$ ,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{abc}$ . Pierādīt, ka  $a^{2024} + b^{2024} + c^{2024} = 3$

**Atrisinājums.** Pārveidosim dotās izteiksmes:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ (a + b + c)^2 &= 9 \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca &= 9 \\ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4ab + 4bc + 4ca &= 18 \end{aligned}$$

un

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{3}{abc} \\ bc + ac + ab &= 3 \\ 6bc + 6ac + 6ab &= 18 \end{aligned}$$

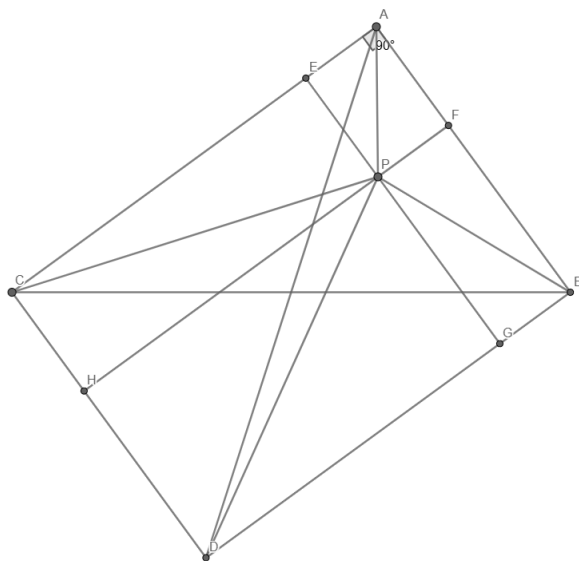
Pielīdzinot abas vienādības:

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4ab + 4bc + 4ca &= 6bc + 6ac + 6ab \\ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca &= 0 \\ (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) &= 0 \\ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Tā kā skaitļa kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, tad secinām, ka  $(a - b)^2 = 0$ ,  $(b - c)^2 = 0$ ,  $(c - a)^2 = 0$ , jeb  $a = b = c$ . Tā kā  $a + b + c = 3$ , tad iegūstam, ka  $a = b = c = 1$ . Līdz ar to

$$a^{2024} + b^{2024} + c^{2024} = 1^{2024} + 1^{2024} + 1^{2024} = 3$$

**15.uzdevums** Punkts  $P$  atrodas taisnleņķa trijstūra  $ABC$  iekšpusē.  $PA = 3$ ,  $PB = 7$ ,  $PC = 9$ . Kāds ir lielākais iespējamais malas  $BC$  garums?



**Atrisinājums.** Papildinām zīmējumu, lai mums būtu taisnstūris  $ABCD$ .  $PE, PF, PG, PH$  ir attiecīgi augstumi no punkta  $P$  pret taisnstūra malām. Pēc pitagora teorēmas, mums ir

$$\begin{aligned}PA^2 &= PE^2 + PF^2 \\PB^2 &= PF^2 + PG^2 \\PC^2 &= PE^2 + PH^2 \\PD^2 &= PH^2 + PG^2\end{aligned}$$

Ievērojam, ka varam aprēķināt  $PD$ :

$$\begin{aligned}PD^2 + PA^2 &= PH^2 + PG^2 = PC^2 - PE^2 + PB^2 - PF^2 + \\&+ PE^2 + PF^2 = PC^2 + PB^2 = 81 + 49 = 130 \\PD^2 &= 130 - PA^2 = 121 \\PD &= 11\end{aligned}$$

Pēc trijstūra nevienādības no trijstūra  $APD$  iegūstam, ka  $AD < PA + PD = 14$ . Taču šoreiz punkts  $P$  var atrasties uz nogriežņa  $AD$ , kas nozīmē, ka var sasniegt vienādību un  $AD \leq PA + PD = 14$

Tā kā gan  $BC$ , gan  $AD$  ir taisnstūra diagonāles, tad  $BC = AD \leq 14$ . Līdz ar to lielākais iespējamais malas  $BC$  garums ir 14.