



Atvērtā kopa 2024

Piezīmes: Mērījumi no zīmējuma netiek skaitīti kā daļa no pierādījuma.

Ja netiek precizēts, tad visi skaitļi ir reāli.

Dažos uzdevumos, iespējams, ir vajadzīgas formulas, ko var viegli atrast internetā.

Visos uzdevumos, kur atbilde nav vesels skaitlis, kā atbilde tiek pieņemts tuvākais mazāks vesels skaitlis. Piemēram, ja atbilde ir π , tad Google Formā ir jāraksta 3, ja ir $-\pi$, tad -4.

Nebaidieties izmantot interneta resursus, piemēram, [desmos.com](https://www.desmos.com).

Uzdevumi nav sakārtoti pēc grūtības.

Pirmie 10 uzdevumi ir vērti katrs 2 punkti, pierādīšanas uzdevumi ir vērti 5 punkti.

Uzdevumi 9-10 klasēm

Uzdevumi uz atbildi

1.uzdevums Naturālu skaitli n sauksim par *atvērtu*, ja $n^3 < 2024 < 3^n$. Cik daudz ir tādu *atvērtu* skaitļu?

2.uzdevums Dots, ka $x^2 - y^2 = 2xy$ un $x \neq y$. Kāda ir visu iespējamo izteiksmes $\frac{x+y}{x-y}$ vērtību summa?

3.uzdevums Dots, ka kaut kādam leņķim x

$$\frac{1}{2} = \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Aprēķināt izteiksmes $(\cos x)^{2024} + (\sin x)^{2024}$ vērtību.

4.uzdevums Kāds ir lielākais šaha zirgu skaits, ko var ielikt 4×4 rūtiņu laukumā, ka neviena zirgs neapdraudē nevienu citu zirgu?

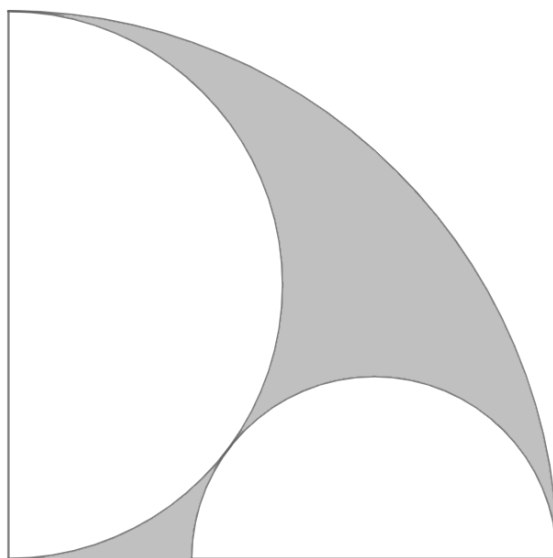
5.uzdevums Dota naturālu skaitļu aritmētiskā progresija, kuras pirmais loceklis $a_1 = 2027$. Zināms, ka neviena no virknes locekļiem nedalās ar skaitli 2027. Kāds ir lielākais virknes garums?

6.uzdevums Reāli skaitļi x, y, z apmierina vienādojumu sistēmu

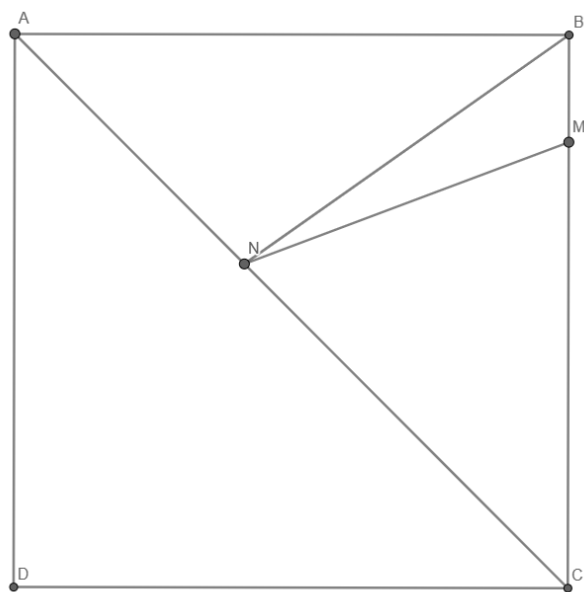
$$\begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y^2 + 1 = 2z \\ z^2 + 1 = 2x \end{cases}$$

Kāda ir visu iespējamo x vērtību summa?

7.uzdevums Lielās ceturtdaļas riņķa līnijas rādiuss ir 6, un abi mazie pusriņķi savstarpēji pieskaras. Cik liels ir iekrāsotais laukums? Pieņemot, ka $\pi = 3$.



8.uzdevums Punkts N atrodas uz kvadrāta $ABCD$ diagonāles AC un punkts M atrodas uz nogriežņa BC . $AB = 8$, $BM = 2$. Kāds ir summas $BN + NM$ minimums?



9.uzdevums Cik daudz dažādi naturāli trijnieki (x, y, z) apmierina vienādību?

$$3x^2 + y^2 = 6z^2 + 2$$

10.uzdevums Dota funkcija f , ka $f(f(x)) = x^2 - 15x + 64$. Kāda ir $f(8)$ vērtība?

Pierādīšanas uzdevumi

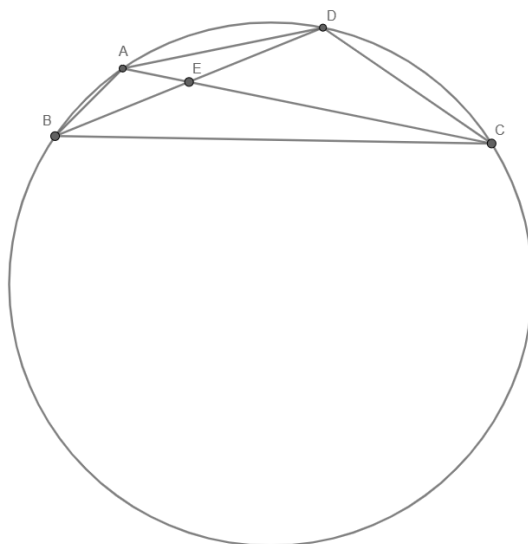
11.uzdevums Pierādīt, ka reāliem skaitļiem x, y, z

$$(z^2 + 1)(x^2 + y^2) + 4xyz + 2 + 2(z + 1)(x + y) \geq 0$$

12.uzdevums Dota parabola $y = -x^2 + 2x + 3$, kas krusto y un x asis attiecīgi punktos A un B . Punkts P koordinātas ir $(1, 4)$, punkts Q atrodas uz parabolas un atrodas virs taisnes AB . Zināms, ka trijstūriem APB un AQB ir vienāds laukums. Kādas ir punkta Q koordinātas?

13.uzdevums Dota virkne a_n . Zināms, ka $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$. Atrast vispārīgo virknes locekļa formulu.

14.uzdevums Dots, ka četrstūra $ABCD$ apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir 5. Punkts E ir AC un BD krustpunkts. $BE = DE$, $CD = \sqrt{2}DE$, $AC = 8$. Aprēķināt četrstūra $ABCD$ laukumu.



15.uzdevums Dots trijstūris ABC , kuram leņķa $\angle A$, $\angle B$ un $\angle C$ lielumi veido aritmētisko progresiju tieši šādā secībā. a , b un c ir leņķiem $\angle A$, $\angle B$ un $\angle C$ atbilstošās malas garums. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$