



Uzdevumi 9-10 klasēm

Uzdevumi uz atbildi

1.uzdevums *Naturālu skaitli n sauksim par atvērtu, ja $n^3 < 2024 < 3^n$. Cik daudz ir tādu atvērtu skaitļu?*

Atrisinājums. Apskatām dotās nevienādības kā 2 atsevišķas nevienādības: $n^3 < 2024$ un $2024 < 3^n$. Ievērojam, ka $\sqrt[3]{2024} = 12,6$, tātad $n < 12,6$. Taču $3^7 = 2187$ un $3^6 = 729$, līdz ar to $n > 6$. Tā kā n ir naturāls, tad mums der $n = 7, 8, 9, 10, 11, 12$, tātad kopā ir 6 atvērti skaitļi.

2.uzdevums *Dots, ka $x^2 - y^2 = 2xy$ un $x \neq y$. Kāda ir visu iespējamo izteiksmes $\frac{x+y}{x-y}$ vērtību summa?*

Atrisinājums. Ievērojam, ka

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

Atņemot otro vienādību no pirmās, iegūstam, ka

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 2 \cdot 2xy$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 2 \cdot (x^2 - y^2)$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 2(x+y)(x-y)$$

Izdalot abas puse ar $(x-y)^2$, iegūstam, ka

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{x+y}{x-y}$$

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x+y}{x-y} = 1$$

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x+y}{x-y} + 1 = 2$$

$$\left(\frac{x+y}{x-y} - 1\right)^2 = 2$$

$$\frac{x+y}{x-y} - 1 = \pm\sqrt{2}$$

$$\frac{x+y}{x-y} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Līdz ar to visu iespējamo $\frac{x+y}{x-y}$ vērtību summa ir $1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$

3.uzdevums Dots, ka kaut kādam leņķim x

$$\frac{1}{2} = (\sin x - \frac{1}{2})^2 + (\cos x - \frac{1}{2})^2$$

Aprēķināt izteiksmes $(\cos x)^{2024} + (\sin x)^{2024}$ vērtību.

Atrisinājums. Pārveidosim doto vienādību:

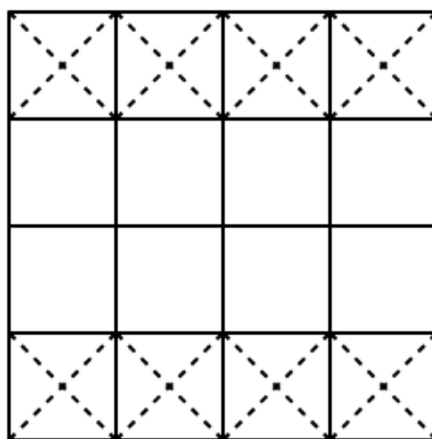
$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= (\sin x - \frac{1}{2})^2 + (\cos x - \frac{1}{2})^2 \\ \frac{1}{2} &= (\sin x)^2 - \sin x + \frac{1}{4} + (\cos x)^2 - \cos x + \frac{1}{4} \\ 0 &= (\sin x)^2 - \sin x + (\cos x)^2 - \cos x \\ 0 &= 1 - \sin x - \cos x \\ \sin x + \cos x &= 1 \\ (\sin x)^2 + 2 \sin x \cos x + (\cos x)^2 &= 1 \\ 2 \sin x \cos x + 1 &= 1 \\ 2 \sin x \cos x &= 0\end{aligned}$$

Tas nozīmē, ka viens no $\sin x$ un $\cos x$ ir 0. Taču mēs zinām, ka $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$. Ja viens no $\sin x$ un $\cos x$ ir 0, tad otrs ir ± 1 . Līdz ar to

$$(\cos x)^{2024} + (\sin x)^{2024} = 0 + (-1)^{2024} = 1$$

4.uzdevums Kāds ir lielākais šaha zirgu skaits, ko var ielikt 4×4 rūtiņu laukumā, ka neviens zirgs neapdraud nevienu citu zirgu?

Atrisinājums. Lielākais zirgu skaits ir 8. Ievērojam, ka 4×4 rūtiņu kvadrātā varam ielikt ne vairāk kā 8 zirgus, jo katrs zirgs aizņem vienu rūtiņu un apdraud vismaz vienu rūtiņu. Tā kā kopā ir 16 rūtiņas, tad ir ne vairāk kā 8 zirgi. Ievērojam, ka patiešām varam ielikt 8 zirgus šajā rūtiņu kvadrātā:



5.uzdevums Dota naturālu skaitļu aritmētiskā progresija, kuras pirmais loceklis $a_1 = 2027$. Zināms, ka neviens no virknes locekļiem nedalās ar skaitli 2027. Kāds ir lielākais virknes garums?

Atrisinājums. Lielākais virknes garums ir tieši 2027, ko var sasniegt, ņemot virkni

$$2027, 2028, 2029, \dots, 4053$$

Tā kā katrs virknes loceklis ir mazāks nekā 2×2027 , tad neviens no tiem nedalās ar skaitli 2027. Tālāk pierādīsim, ka garāka virkne neder. Ievērojam, ka virknes loekli var izteikt ar formulu

$$a_n = 2027 + d(n - 1)$$

Tas savukārt nozīmē, ka, ja $n > 2027$, tad, apskatot a_{2028} , iegūstam, ka

$$a_{2028} = 2027 + d(2028 - 1) = 2027(1 + d)$$

kas dalās ar 2027. Tas ir pretrunā ar doto. Līdz ar to virkne nav garāka par 2027.

6.uzdevums Reāli skaitļi x, y, z apmierina vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y^2 + 1 = 2z \\ z^2 + 1 = 2x \end{cases}$$

Kāda ir visu iespējamo x vērtību summa?

Atrisinājums. Sasummējot visas 3 vienādības, iegūstam:

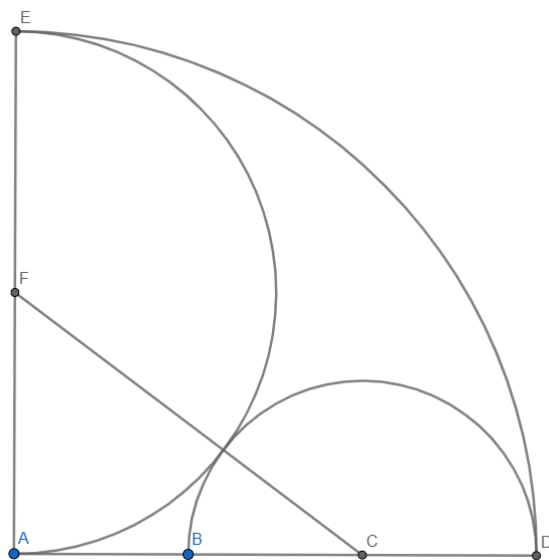
$$\begin{aligned}x^2 + 1 + y^2 + 1 + z^2 + 1 &= 2y + 2z + 2x \\x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 &= 0 \\(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 &= 0\end{aligned}$$

Tā kā skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad iegūstam, ka

$$(x - 1)^2 = (y - 1)^2 = (z - 1)^2 = 0$$

kas nozīmē, ka $x = 1$. Līdz ar to visu iespējamo x vērtību summa ir 1.

7.uzdevums Lielās ceturtdaļas riņķa līnijas rādiuss ir 6, un abi mazie pusriņķi savstarpēji pieskaras. Cik liels ir iekrāsotais laukums? Pieņemot, ka $\pi = 3$.



Atrisinājums. Redzam, ka lielā pusriņķa rādiuss ir 3, apzīmējam mazā pusriņķa rādiusu ar r . Ievērojam, ka, tā kā abi mazie pusriņķi pieskaras, tad $CF = 3 + r$ un $AC = 6 - r$. Pēc Pitagora teorēmas mums ir

$$\begin{aligned}AF^2 + AC^2 &= CF^2 \\3^2 + (6 - r)^2 &= (r + 3)^2 \\9 + 36 - 12r + r^2 &= r^2 + 6r + 9 \\18r &= 36 \\r &= 2\end{aligned}$$

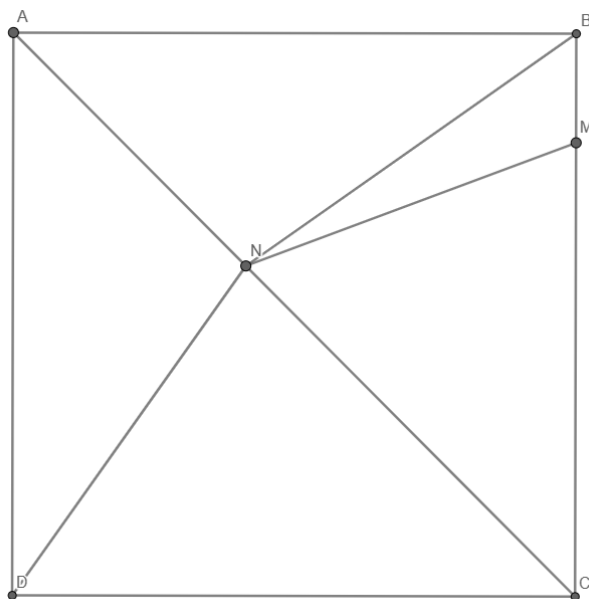
Ceturtdaļas riņķa laukums ir $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2 = 27$.

Lielā pusriņķa laukums ir $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{27}{2}$.

Mazā pusriņķa laukums ir $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 6$.

Līdz ar to iekrāsotās daļas laukums ir $27 - \frac{27}{2} - 6 = 7,5$, un pieņemtā atbilde ir 7.

8.uzdevums Punkts N atrodas uz kvadrāta $ABCD$ diagonāles AC un punkts M atrodas uz nogriežņa BC . $AB = 8$, $BM = 2$. Kāds ir summas $BN + NM$ minimums?



Atrisinājums. Ievērojam, ka $DN = BN$, līdz ar to $BN + NM = DN + NM$. Skaidrs, ka $DN + NM$ minimums ir tad, kad punkti D , N un M atrodas uz vienas taisnes. Tajā gadījumā mums ir taisnleņķa trijstūris MDC , kur $DC = 8$, $CM = 8 - 2 = 6$. Pēc Pitagora teorēmas mums ir $DN + NM = 10$.

9.uzdevums Cik daudz dažādi naturāli trijnieki (x, y, z) apmierina vienādību?

$$3x^2 + y^2 = 6z^2 + 2$$

Atrisinājums. Apskatot vienādību pēc atlikuma, dalot ar 3, iegūstam, ka

$$3x^2 \equiv 0$$

$$6z^2 \equiv 0$$

kas nozīmē, ka $y^2 \equiv 2$. Taču skaitļa kvadrāts nevar dot atlikumu 2, dalot ar 3. Līdz ar to ir tieši 0 tādu trijnieku, kas apmierina mūsu vienādību.

PS. Šeit varat palasīt vairāk par modulāro aritmētiku.

10.uzdevums Dota funkcija f , ka $f(f(x)) = x^2 - 15x + 64$. Kāda ir $f(8)$ vērtība?

Atrisinājums. Ievērojam, ka

$$f(f(8)) = 8^2 - 15 \cdot 8 + 64 = 8$$

kas nozīmē, ka

$$f(8) = f(f(f(8)))$$

Taču pēc dotās formulas

$$f(f(f(8))) = f(8)^2 - 15 \cdot f(8) + 64$$

Līdz ar to

$$f(8) = f(8)^2 - 15 \cdot f(8) + 64$$

$$0 = f(8)^2 - 16 \cdot f(8) + 64$$

$$0 = (f(8) - 8)^2$$

$$f(8) = 8$$

Pierādīšanas uzdevumi

11.uzdevums *Pierādīt, ka reāliem skaitļiem x, y, z*

$$(z^2 + 1)(x^2 + y^2) + 4xyz + 2 + 2(z + 1)(x + y) \geq 0$$

Atrisinājums. Pārveidosim doto nevienādību:

$$(z^2 + 1)(x^2 + y^2) + 4xyz + 2 + 2(z + 1)(x + y) \geq 0$$

$$x^2z^2 + y^2z^2 + x^2 + y^2 + 4xyz + 2 + 2(xz + yz + x + y) \geq 0$$

$$x^2z^2 + y^2z^2 + x^2 + y^2 + 4xyz + 2 + 2xz + 2yz + 2x + 2y \geq 0$$

$$(y^2 + xyz + y + xyz + x^2z^2 + xz + y + xz + 1) + (x^2 + xyz + x + xyz + y^2z^2 + yz + x + yz + 1) \geq 0$$

$$(y(y + xz + 1) + xz(y + xz + 1) + (y + xz + 1)) + (x(x + yz + 1) + yz(x + yz + 1) + (x + yz + 1)) \geq 0$$

$$(y + xz + 1)^2 + (x + yz + 1)^2 \geq 0$$

kas ir patiess.

12.uzdevums *Dota parabola $y = -x^2 + 2x + 3$, kas krusto y un x asis attiecīgi punktos A un B . Punkts P koordinātas ir $(1, 4)$, punkts Q atrodas uz parabolas un atrodas virs taisnes AB . Zināms, ka trijstūriem APB un AQB ir vienāds laukums. Kādas ir punkta Q koordinātas?*

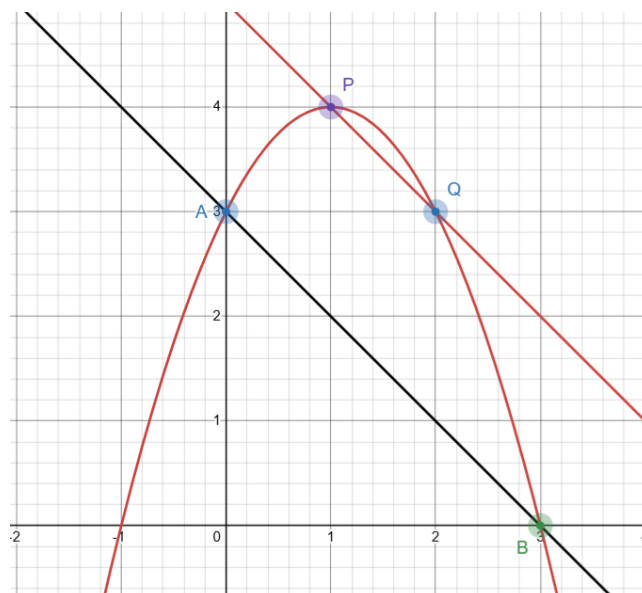
Atrisinājums. Ievērojam, ka trijstūri APB un AQB dala kopīgu malu AB , līdz ar to, ja tiem ir vienāds laukums, tad nozīmē, ka punkts P un Q atrodas vienādos attālumos no taisnes AB , jeb taisne PQ ir paralēla taisnei AB . Ja mēs atrodam taisnes PQ formulu, tad tās 2. krustpunkti ar $y = -x^2 + 2x + 3$ ir punkta Q koordinātas.

Ievērojam, ka $A = (0, 3)$, $B = (3, 0)$, līdz ar to $AB = -x + 3$. Tā kā PQ ir paralēla AB , tad to var uzrakstīt kā $y = -x + k$. Ievietojot punkta P koordinātas (jo punkts P pieder šai taisnei), iegūstam, ka

$$y = -x + k$$

$$4 = -1 + k$$

$$k = 5$$



Līdz ar to $PQ = -x + 5$, tās krustpunktus ar $y = -x^2 + 2x + 3$ ir:

$$\begin{aligned} -x + 5 &= -x^2 + 2x + 3 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ (x - 1)(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Skaidrs, ka punkta Q x koordinātas ir 2. Līdz ar to $y = -x + 5 = 3$, jeb $Q = (2, 3)$ Grafikus var apskatīt šeit.

Ja punkts B ir otrs krustpunkts ar x asi, $(-1, 0)$, tad mums ir $AQ \parallel BP$. Taisnes BP vienādojums ir $2x + 3$, taču

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= -x^2 + 2x + 3 \\ -x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Līdz ar to punkts Q sakrīt ar punktu A , taču tas neatrodas virs AB , līdz ar to šī atbilde neder.

13.uzdevums Dots virkne a_n . Zināms, ka $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$. Atrast vispārīgo virknes locekļa formulu.

Atrisinājums. Pārveidosim doto izteiksmi:

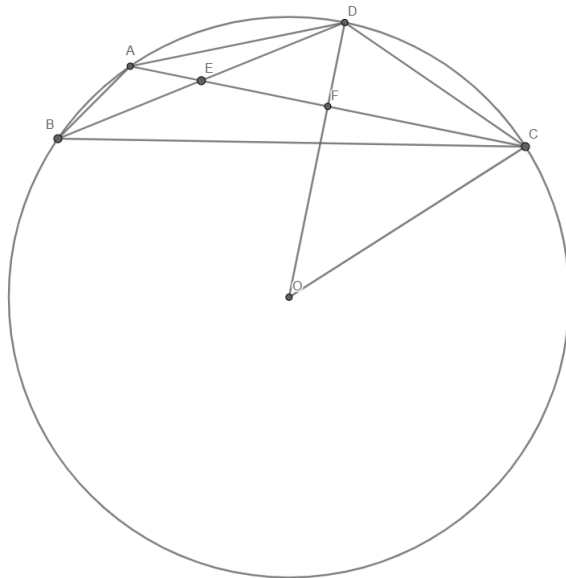
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1 \\ a_{n+1} &= (\sqrt{a_n + 1})^2 + 2\sqrt{a_n + 1} + 1 - 1 \\ a_{n+1} + 1 &= (\sqrt{a_n + 1} + 1)^2 \\ \sqrt{a_{n+1} + 1} &= \sqrt{a_n + 1} + 1 \end{aligned}$$

Definējam jaunu virkni $b_n = \sqrt{a_n + 1}$. Ievērojam, ka b_n ir aritmētiskā progresija. Un $b_1 = \sqrt{a_1 + 1} = 2$, līdz ar to $b_n = 2 + 1 \cdot (n - 1) = n + 1$. Tātad:

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{a_n + 1} \\ n + 1 &= \sqrt{a_n + 1} \\ a_n + 1 &= n^2 + 2n + 1 \\ a_n &= n^2 + 2n \end{aligned}$$

Ievietojot sākotnējā vienādībā, redzam, ka šī virkne patiešām der.

14.uzdevums Dots, ka četrstūra $ABCD$ apvilktais riņķa līnijas rādiuss ir 5. Punkts E ir AC un BD krustpunkts. $BE = DE$, $CD = \sqrt{2}DE$, $AC = 8$. Aprēķināt četrstūra $ABCD$ laukumu.



Atrisinājums. Ievērojam, ka, tā kā E ir BD viduspunkts, tad trijstūriem EDC un BEC ir vienādi laukumi, jo tiem ir tas pats augstums un pamats. Līdzīgi, arī trijstūriem AEB un AED ir vienādi laukumi. Līdz ar to četrstūra $ABCD$ laukums

$$S_{ABCD} = S_{EDC} + S_{BEC} + S_{AEB} + S_{AED} = 2(S_{EDC} + S_{AED}) = 2S_{ADC}$$

Tālāk redzam, ka $CD^2 = DE \cdot DB$, jo $CD = \sqrt{2}DE$. Mums ir

$$\frac{CD}{DB} = \frac{DE}{CD}$$

Tā kā $\angle CDB$ ir kopīgs leņķis, tad trijstūris CDE ir līdzīgs trijstūrim BDC , no kura seko, ka $\angle DCA = \angle DBC$. Tā kā abi leņķi ir ievilkti, tad loki, uz kuriem tie balstās, ir vienādi, jeb $CD = AD$. Līdz ar to punkts D atrodas uz nogriežņa AC vidusperpendikula. Tā kā arī riņķa līnijas centrs pēc definīcijas atrodas uz nogriežņa AC vidusperpendikula, tad mums ir $DO \perp AC$ un to krustpunkts F ir arī AC viduspunkts. No taisnleņķa trijstūra OFC varam aprēķināt OF pēc Pitagora teorēmas:

$$\begin{aligned} OC^2 &= FC^2 + FO^2 \\ FO^2 &= OC^2 - FC^2 = 25 - 16 = 9 \\ FO &= 3 \end{aligned}$$

Līdz ar to

$$S_{ABCD} = 2S_{ADC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DF = 8 \cdot (5 - 3) = 16$$

15.uzdevums Dots trijstūris ABC , kuram leņķa $\angle A$, $\angle B$ un $\angle C$ lielumi veido aritmētisko progresiju tieši šādā secībā. a , b un c ir leņķiem $\angle A$, $\angle B$ un $\angle C$ atbilstošās malas garums. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

Atrisinājums. Pārveidosim doto vienādību:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} &= \frac{3}{a+b+c} \\ (a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}\right) &= 3 \\ \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} &= 3 \\ 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} &= 3 \\ \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} &= 1 \\ c(b+c) + a(a+b) &= (a+b)(b+c) \\ bc + c^2 + a^2 + ab &= b^2 + ab + bc + ac \\ c^2 + a^2 - ac &= b^2 \\ b^2 &= c^2 + a^2 - ac \end{aligned}$$

Atceramies, ka pēc kosinusa teorēmas mums ir

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

Līdz ar to mums paliek vien pierādīt, ka $\cos B = \frac{1}{2}$. Tā kā leņķa $\angle A$, $\angle B$ un $\angle C$ lielumi veido aritmētisko progresiju tieši šādā secībā, tad mums ir $\angle A = \angle B - d$, $\angle C = \angle B + d$, un

$$\angle A + \angle B + \angle C = 3\angle B = 180^\circ \implies \angle B = 60^\circ$$

skaidrs, ka $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, līdz ar to uzdevums ir pierādīts.