



Atvērtā kopa 2024

Piezīmes: Uzdevumi nav sakārtoti pēc grūtības.

Katrs uzdevums ir vērts 5 punktu.

Atbildes ir jāpamato.

Komandas drīkst uzdot jautājumus par jēdzienu definīcijām.

Pierādījumos nedrīkst lietot mērījumus no dotajiem zīmējumiem.

Uz katras risinājuma lapas ir jāuzraksta komandas nosaukums.

Fināla uzdevumi 11. un 12. klasei

1. uzdevums Uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi

$$1 \cdot 3, 3 \cdot 5, 5 \cdot 7, \dots, (4m+3)(4m+5)$$

kur m ir naturāls skaitlis. Katru minūti Edgars nodzēš 3 skaitļus a, b, c no tāfeles, un to vietā uzraksta skaitli

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1) - 1 - a(b+1) - b(c+1) - c(a+1)}{ab + bc + ca}$$

Beigās uz tāfeles paliek tikai 2 skaitļi: x un y . Pierādīt, ka $y > 8$, ja zināms, ka $x = \frac{8}{3}$.

2. uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c , ka $abc = 8$. Pierādīt, ka

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$

3. uzdevums Doti naturāli skaitļi a, b , turklāt $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ arī ir naturāls skaitlis. Pierādīt, ka $LKD(a, b) \leq \sqrt{a+b}$. Piezīme: par a un b LKD sauc lielāko skaitli, kas dala gan a , gan b .

4. uzdevums Atrast visus naturālu skaitļu trijniekus $x, y, z \geq 1$, kuri apmierina vienādojumu $2^x + 7^y = z^2 + 4$.

5. uzdevums Dota reālu skaitļu virkne a_n . Zināms, ka $a_1 > a_2$ un $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ katram $n \geq 2$. Kāds ir lielākais iespējamais secīgu pozitīvu virknes locekļu skaits?

6. uzdevums Doti reāli skaitļi a, b, c, d , kuriem izpildās $a+b+c+d = 0$ un $a^2+b^2+c^2+d^2 = 12$. Atrast mazāko un lielāko iespējamo $abcd$ vērtību, kā arī pie kādām vērtībām tās ir iespējams iegūt.

7. uzdevums Dots trijstūris ABC ar incentru (ievilktās riņķa līnijas centru) I . Šajā trijstūrī ievilktā riņķa līnija pieskaras malai BC punktā D . Punkti E, F ir izvēlēti tā, ka $BE \parallel AI \parallel CF$, un $\angle BEI = \angle CFI = 90^\circ$. Ja DE un DF krusto ievilkto riņķa līniju punktos E' un F' respektīvi, pierādīt, ka $E'F' \perp AI$.

8. uzdevums Dots $m \times n$ rūtiņu taisnstūris, kura kreisajā apakšējā rūtiņā ir šaha bandinieks. Maksims un Edgars spēlē sekojošu spēli, veicot gājienus viens pēc otra: katrā gājienā spēlētājs bandinieku pārvieto jebkurā kaimiņu rūtiņā, kurai ir kopīga mala ar iepriekšējo rūtiņu. Taču bandinieks nedrīkst ieiet rūtiņā, kurā tas jau ir bijis. Edgars pirmais veic gājienu, un spēli zaudē tas spēlētājs, kuram nepaliek neviena atļauts gājiens. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?

9. uzdevums Maksims gāja pa ielu, kad viņš pēkšņi iedomājās teorētisku situāciju: turnīrā katrs spēlētājs izspēlē tieši vienu spēli ar katru no pārējiem spēlētājiem. Katrā spēlē uzvarētājs iegūst 1 punktu, zaudētājs — 0, bet neizšķirta gadījumā abi saņem $\frac{1}{2}$ punktus. Pēc turnīra atklājās, ka katrs spēlētājs ieguva tieši pusi savu punktu spēlēs pret 10 spēlētājiem ar zemāko punktu skaitu (Katrs no 10 spēlētājiem ar zemāko punktu skaitu ieguva pusi savu punktu, spēlējot pret pārējiem 9). Cik spēlētāji piedalījās turnīrā?

10. uzdevums Maksims pavada dienu pludmalē un nolēma savākt n akmentiņus. Viņš tos sakārtoja n kaudzītēs, kur katrā kaudzītē ir tieši 1 akmentiņš. Maksimam patīk divas lietas — lielas kaudzes un strikti noteikumi. Viņš izlēma, ka vienīgā darbība, ko viņš drīkst veikt, ir paņemt vienādu daudzumu akmentiņu no divām kaudzēm, un apvienot šos akmentiņus jaunā kaudzē. Atrast, kāds ir mazākais ne tukšu kaudžu skaits (izsakot ar n), kādu Maksims var iegūt, veicot galīgu daudzumu atļauto gājienu.

11. uzdevums Ejot mājās no pludmales, Maksims secināja, ka akmeņu kaudze izskatīsies labāk no augstāka punkta, tādēļ izlēma uzkāpt augstā kokā. Kāpjot augšā viņš iedomājās sekojošu uzdevumu: atrast visus iespējamais skaitļu pārus $x, y \in \mathbb{N}_0$, kuriem $2^x + 3^y$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. Atrisināt Maksima uzdevumu.