



Fināla uzdevumi 11-12 klasēm

1.uzdevums Uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi

$$1 \cdot 3, 3 \cdot 5, 5 \cdot 7, \dots, (4m+3)(4m+5)$$

kur m ir naturāls skaitlis. Katru minūti Edgars izdzēs 3 skaitļus a, b, c no tāfeles, un to vietā uzraksta skaitli

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1) - 1 - a(b+1) - b(c+1) - c(a+1)}{ab + bc + ca}$$

Kad uz tāfeles paliek tikai 2 skaitļi x, y , pierādīt, ka $y > 8$, ja zināms, ka $x = \frac{8}{3}$.

Atrisinājums. Apzīmējam jauno skaitli ar z . Novērojam, ka

$$\frac{\frac{(a+1)(b+1)(c+1) - 1 - a(b+1) - b(c+1) - c(a+1)}{ab + bc + ca}}{\frac{abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 - 1 - ab - a - bc - b - ca - a}{ab + bc + ca}} = \frac{abc}{ab + bc + ca}$$

Tāču

$$\frac{1}{z} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

kas nozīmē, ka uz tāfeles uzrakstīto skaitļu apgrieztā summa ir invariants. Redzam, ka

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(4m+3)(4m+5)} = \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4m+3} - \frac{1}{4m+5} \right) = \\ & \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4m+5} \right) < \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Līdz ar to mums ir

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{1}{y} &< \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} &< \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} &< \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{8}{3}} \\ \frac{1}{y} &< \frac{1}{8} \\ 8 &< y\end{aligned}$$

kas pierāda prasīto.

2.uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c , ka $abc = 8$. Pierādīt, ka

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$

Atrisinājums. Novērojam, ka

$$\frac{a^2+2}{2} = \frac{(a^2-a+1)+(a+1)}{2} \geq \sqrt{(a^2-a+1)(a+1)} = \sqrt{1+a^3}$$

Līdz ar to sākotnējā nevienādība pārvēršas par

$$\frac{a^2}{(a^2+2)(b^2+2)} + \frac{b^2}{(b^2+2)(c^2+2)} + \frac{c^2}{(c^2+2)(a^2+2)} \geq \frac{1}{3}$$

Redzam, ka

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{(a^2+2)(b^2+2)} + \frac{b^2}{(b^2+2)(c^2+2)} + \frac{c^2}{(c^2+2)(a^2+2)} &\geq \frac{1}{3} \\ 3a^2(c^2+2) + 3b^2(a^2+2) + 3c^2(b^2+2) &\geq (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \\ 3a^2c^2 + 6a^2 + 3b^2a^2 + 6b^2 + 3c^2b^2 + 6c^2 &\geq a^2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2b^2a^2 + 2c^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8 \\ (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2) &\geq a^2b^2c^2 + 8 = 72\end{aligned}$$

Novērojam, ka $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3(abc)^{\frac{4}{3}} = 48$ un $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}} = 12$, līdz ar to pēdējā nevienādība ir patiesa, un uzdevums ir atrisināts.

3.uzdevums Doti naturāli skaitļi a, b , turklāt $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ arī ir naturāls skaitlis. Pierādīt, ka $LKD(a, b) \leq \sqrt{a+b}$. Piezīme: par a un b LKD sauc lielāko skaitli, kas dala gan a , gan b .

Atrisinājums. Novērojam, ka

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + a + b^2 + b}{ab}$$

Tā kā tas ir naturāls skaitlis, tad mums ir

$$ab|a^2 + a + b^2 + b$$

kur $x|y$ nozīmē, ka x dala y . Apzīmējam a ar $d \cdot x$ un b ar $d \cdot y$, kur $d = LKD(a, b)$. Skaidrs, ka $LKD(x, y) = 1$. Līdz ar to

$$ab|a^2 + a + b^2 + b \implies d^2xy|d^2x^2 + dx + d^2y^2 + dy \\ dxy|dx^2 + x + dy^2 + y$$

Tā kā $dx^2 + x + dy^2 + y$ dalās ar dxy , tad tas dalās ar d . Līdz ar to

$$d|dx^2 + x + dy^2 + y \\ d|x + y \\ d^2|dx + dy \\ d^2|a + b$$

Skaidrs, ka, ja $u|v$, tad $|u| \leq |v|$. Tā kā a, b, d ir pozitīvi, tad secinām, ka $a + b \geq d^2$, jeb $d \leq \sqrt{a + b}$, kas pierāda uzdevumu.

4.uzdevums Atrast visus naturālu skaitļu trijniekus $x, y, z \geq 1$, kuri apmierina vienādojumu $2^x + 7^y = z^2 + 4$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka, ja $x \geq 3$, tad $7^y \equiv z^2 + 4 \pmod{8}$. Tā kā $7^y \equiv \pm 1 \pmod{8}$, $z^2 \equiv 3$ vai $z^2 \equiv 5 \pmod{8}$. Taču naturāla skaitļa kvadrāts var dot tikai atlikumu 0, 1 vai 4, dalot ar 8, tādēļ šādu naturālu skaitļu trijnieku nav. Ja $x = 2$, iegūst $4 + 7^y = z^2 + 4$ jeb $7^y = z^2$. Viegli ievērot, ka šo vienādojumu apmierina bezgalīgi daudz skaitļu pāru y, z , kuri izsakāmi formā $y = 2k \ \forall k \in \mathbb{N}$, $z = 7^k$. Iegūstam bezgalīgi daudz skaitļu trijnieku, kas izsakāmi formā $(2, 2k, 7^k)$ visiem naturāliem skaitļiem k . Visbeidzot, aplūkosim gadījumu, kad $x = 1$. Iegūstam izteiksmi $7^y = z^2 + 2$. Varam izmantot skaitļa atlikumu, dalot ar 7. Skaidrs, ka izteiksmes kreisā puse dalās ar 7, tātad arī labā dalās ar 7. Tātad $z^2 \equiv 5 \pmod{7}$. Tomēr vienīgie atlikumi, kurus var iegūt, naturāla skaitļa kvadrātu dalot ar 7, ir 0, 1, 2, 4, tādēļ šādu skaitļu trijnieku nav, un esam atraduši visus iespējamās naturālu skaitļu trijniekus.

5.uzdevums Dota reālu skaitļu virkne a_n . Zināms, ka $a_1 > a_2$ un $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ katram $n \geq 2$. Kāds ir lielākais iespējamais sekojošo pozitīvo virknes locekļu skaits?

Atrisinājums. Ievērojam, ka

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \implies a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

Līdz ar to induktīvi varam secināt, ka šī virkne ir dilstoša aritmētiskā progresija. Ņemam pietiekamu lielu a_1 un mazu d , kas ir negatīvs, varam garantēt, ka eksistē jebkāda galīga skaita sekojošu pozitīvu locekļu.

6.uzdevums Doti reāli skaitļi a, b, c, d , kuriem izpildās $a+b+c+d = 0$ un $a^2+b^2+c^2+d^2 = 12$. Atrast mazāko un lielāko iespējamo $abcd$ vērtību, kā arī pie kādām vērtībām tās iespējams iegūt.

Atrisinājums. Ievērosim, ka $a^2, b^2, c^2, d^2 \geq 0$, tādēļ varam izmantot AM-GM nevienādību, lai iegūtu $12 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = \sqrt{abcd}$ jeb $81 \geq a^2b^2c^2d^2$. Lielāko vērtību iespējams sasniegt, kad $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = \sqrt[4]{81} = 3$. Tātad katrs loceklis ir $\pm\sqrt{3}$. Tā kā $a + b + c + d = 0$, diviem nezināmajiem jābūt $\sqrt{3}$, un diviem jābūt $-\sqrt{3}$. Tātad der, piemēram, skaitļu vērtības $a = b = -c = -d = \sqrt{3}$. Lai atrastu mazāko $abcd$ vērtību, varam pieņemt, ka tā ir negatīva. Tātad vienam vai trim no nezināmajiem jābūt negatīvam. Pieņemsim, ka skaitlis d ir negatīvs, savukārt $a, b, c > 0$ (ja kāds no locekļiem ir 0, $abcd = 0$). No $a + b + c + d = 0$ varam izteikt $d = -(a + b + c)$. Tagad nepieciešams atrast mazāko $-abc(a + b + c)$ vērtību jeb lielāko $abc(a + b + c)$ vērtību.

Ievietojot $d = -(a + b + c)$ izteiksmē $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$, iegūst

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 = 12$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 12$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac = 6$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 6 + ab + bc + ac$$

$$(a + b + c)^2 = 6 + ab + bc + ac$$

$$a + b + c = \sqrt{6 + ab + bc + ac}$$

Ievērosim, ka, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + cd$, jo, abas puses sareizinot ar divi un pārnēsot vienā pusē, iegūst $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$. Tātad $ab + bc + ac \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Atgriežoties pie iesāktajiem pārveidojumiem, redzams, ka

$$a + b + c = \sqrt{6 + ab + bc + ac} \leq \sqrt{6 + 3} = 3$$

Tagad nepieciešams atrast lielāko iespējamo abc vērtību. No $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac = 6$ varam iegūt $6 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac \geq 6\sqrt[6]{a^4b^4c^4}$ jeb $1 \geq abc$. Iegūstam sistēmu

$$\begin{cases} abc \leq 1 \\ a + b + c \leq 3 \end{cases}$$

$abc(a + b + c) \leq 3 \Rightarrow abcd = -abc(a + b + c) \geq -3$. Šo vērtību var iegūt tikai tad, ja $a = b = c = 1, d = -3$.

7.uzdevums Dots trijstūris ABC ar incentru I . Šī trijstūra ievilkta riņķa līnija pieskaras malu BC punktā D . Punkti E, F ir izvēlēti tā, ka $BE \parallel AI \parallel CF$ un $\angle BEI = \angle CFI = 90^\circ$. Ja DE, DF krusto ievilkto riņķa līniju punktā E' un F' , pierādīt, ka $E'F' \perp AI$.

Atrisinājums. No sākuma pierādīsim, ka punkti E, I, F atrodas uz vienas taisnes. Novērojam, ka $BE \parallel AI \parallel CF \implies \angle CFI = 90^\circ = \angle FIA$ un $\angle BEI = 90^\circ = \angle EIA$. Līdz ar to $\angle EIF = \angle FIA + \angle EIA = 180^\circ$, un punkti E, I, F atrodas uz vienas taisnes.

Tā kā $AI \perp EF$, tad mums pietiek pierādīt, ka $EF \parallel E'F'$, lai pierādītu, ka $E'F' \perp AI$. Tātad jāpierāda, ka $\angle FED = \angle F'E'D$.

Pierādīsim, ka punkti I, E, B, D atrodas uz vienas riņķa līnijas. Redzam, ka $\angle BEI + \angle BDI = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, tad secinām, ka šie punkti atrodas uz vienas riņķa līnijas. Līdzīgi arī punkti I, F, C, D atrodas uz vienas riņķa līnijas. Ievērojam, ka $\angle FED = \angle IED = \angle IBD$ un $\angle F'E'D = \angle CDF'$ (pieskares leņķis) un $\angle CDF' = \angle FIC$, līdz ar to $\angle F'E'D = \angle CDF' = \angle FIC$. Tālāk mums pietiek pierādīt, ka $\angle IBD = \angle FIC$.

Tā kā punkts I ir incentrs, tad secinām, ka $\angle IBD + \angle ICD + \angle IAC = 90^\circ$. Turklāt, tā kā punkti I, F, C, D atrodas uz vienas riņķa līnijas, tad mums ir $\angle FID + \angle FCD = 180^\circ$.

Ievērojam, ka $\angle FCA = \angle IAC$, $\angle ACI = \angle DCI$ un $\angle DIC = 90^\circ - \angle DCI$, tad

$$\angle FID + \angle FCD = 180^\circ$$

$$\angle FIC + \angle DIC + \angle DCI + \angle ACI + \angle FCA = 180^\circ$$

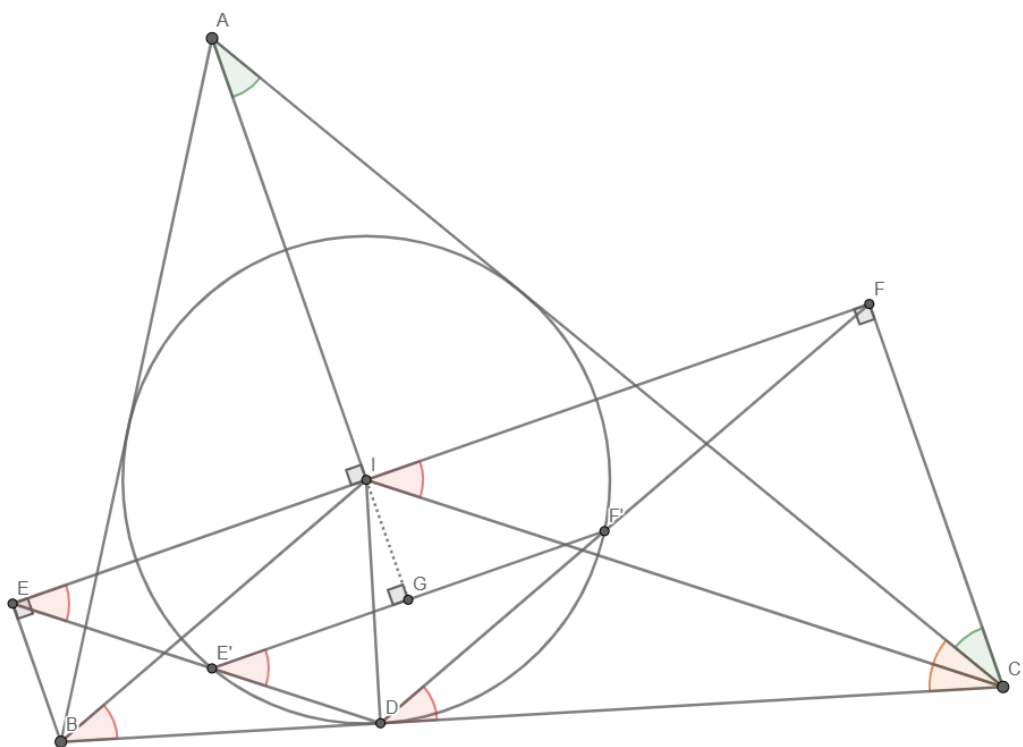
$$\angle FIC + 90^\circ - \angle DCI + 2\angle ICD + \angle IAC = 180^\circ$$

$$\angle FIC + 90^\circ - \angle ICD + 2\angle ICD + \angle IAC = 180^\circ$$

$$\angle FIC + 90^\circ + \angle ICD + \angle IAC = 180^\circ$$

$$\angle FIC + \angle ICD + \angle IAC = 90^\circ$$

Tā kā $\angle IBD + \angle ICD + \angle IAC = 90^\circ$ un $\angle FIC + \angle ICD + \angle IAC = 90^\circ$, tad secinām, ka $\angle IBD = \angle FIC$, kas pierāda prasīto.



8.uzdevums Dots $m \times n$ rūtiņu taisnstūris, kura kreisajā apakšējā rūtiņā ir šaha bandinieks. Maksims un Edgars spēlē sekojošu spēli, veicot gājienu viens pēc otra: katrā gājienā spēlētājs bandinieku pārvieto jebkurā kaimiņu rūtiņā, kas daļa malu ar iepriekšējo rūtiņu. Taču bandinieks nedrīkst ieiet rūtiņā, kurā tas jau ir bijis. Edgars pirmais veic gājienu, un spēli zaudē tas spēlētājs, kurš kādā brīdī vairs nevar veikt atļauto gājienu. Kuram spēlētājam ir uzvarējoša stratēģija?

Atrisinājums. Apskatām 2 gadījumus.

- Ja mn dalās ar 2, tad Edgaram vienmēr ir uzvaroša stratēģija. Varam taisnstūri sadalīt ar domino kauliņiem. Ievērojam, ka Edgars vienmēr var garantēt, ka katrā savā gājienā bandinieks pārvietojas iekšpus domino kauliņam, līdz ar to pēc Edgara gājiena Maksimam vienmēr vajag pārvietot bandinieku ārpus vienam domino kauliņam. Tā kā kopējais domino kauliņu skaits ir ierobežots, tad secinām, ka vienā brīdī Maksimam nebūs domino kauliņu, kurā varēs pārvietot bandinieku, un viņš zaudēs.
- Ja mn nedalās ar 2, tad Maksimam vienmēr ir uzvaroša stratēģija. Šoreiz taisnstūri noklāsim ar domino kauliņiem, izņemot kreiso apakšējo rūtiņu. Šajā gadījumā Maksims var garantēt, ka katrā savā gājienā bandinieks pārvietojas iekšpus domino kauliņam, un Edgara gājienā bandinieks vienmēr ieies jaunā domino kauliņā. Tā kā kopējais domino kauliņu skaits ir ierobežots, tad secinām, ka vienā brīdī Edgaram nebūs domino kauliņu, kurā varēs pārvietot bandinieku, un viņš zaudēs.

9. uzdevums Maksims gāja pa ielu, kad viņš pēkšņi iedomājās teorētisku situāciju: turnīrā katrs spēlētājs izspēlē tieši vienu spēli ar katru no pārējiem spēlētājiem. Katrā spēlē uzvarētājs iegūst 1 punktu, zaudētājs — 0, bet neizšķirta gadījumā abi saņem $\frac{1}{2}$ punktus. Pēc turnīra atklājās, ka katrs spēlētājs ieguva tieši pusi savu punktu spēlēs pret 10 spēlētājiem ar zemāko punktu skaitu (Katrs no 10 spēlētājiem ar zemāko punktu skaitu ieguva pusi savu punktu, spēlējot pret pārējiem 9). Cik spēlētāji piedalījās turnīrā?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka turnīrā ir $x + 10$ dalībnieki.

Apakšējie 10 savā starpā nopelnīja $\binom{10}{2} = 45$ punktus.

Kad augšējie x sacentās savā starpā, viņi nopelnīja $\binom{x}{2}$ punktus.

Kad apakšējie 10 sacentās ar augšējiem x , viņi kopumā ieguva 45 punktus, jo puse no punktiem, ko apakšējie 10 guva, tika izcīnīti pret augšējiem x .

Kad augšējie x sacentās ar apakšējiem 10, viņi nopelnīja $\frac{\binom{x+10}{2}}{2} - 45$ punktus.

Tā kā visā turnīrā tika iegūti $\binom{x+10}{2}$ punkti, mēs iegūstam vienādojumu:

$$\frac{\binom{x+10}{2}}{2} - 45 + 90 + \binom{x}{2} = \binom{x+10}{2}.$$

Tas noved pie:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{x+10}{2}}{2} &= 45 + \binom{x}{2}, \\ \frac{(x+9)(x+10)}{4} &= 45 + \frac{x(x-1)}{2}, \end{aligned}$$

$$x^2 + 19x + 90 = 180 + 2x^2 - 2x,$$

$$x^2 - 21x + 90 = 0.$$

Atrisinot šo kvadrātvienādojumu, iegūstam:

$$(x - 15)(x - 6) = 0.$$

Tādējādi x var būt 15 vai 6.

Ja $x = 6$, tad augšējie x ir nopelnījuši:

$$\binom{6}{2} + \frac{\binom{16}{2}}{2} - 45 = 30,$$

kas vidēji ir 5 punkti komandai, bet apakšējie 10 kopā ieguva 90 punktus, kas vidēji ir 9 punkti komandai. Veidojas pretruna, jo tad augšējām x komandām būtu mazāk punktu nekā apakšējām 10.

Tādējādi vienīgais iespējamais risinājums ir $x = 15$, un kopējais dalībnieku skaits ir:

$$15 + 10 = \boxed{25}.$$

10. uzdevums *Maksims pavada dienu pludmalē un nolēma savākt n akmentiņus. Viņš tos sakārtoja n kaudzītēs, kur katrā kaudzītē ir tieši 1 akmentiņš. Maksimam patīk divas lietas — lielas kaudzes un strikti noteikumi. Viņš izlēma, ka vienīgā darbība, ko viņš drīkst veikt, ir paņemt vienādu daudzumu akmentiņu no divām kaudzēm, un apvienot šos akmentiņus jaunā kaudzē. Atrast, kāds ir mazākais ne tukšu kaudžu skaits (izsakot ar n), kādu Maksims var iegūt, veicot galīgu daudzumu atļauto gājienu.*

Atrisinājums. Atbilde ir

$$\begin{cases} 1 & , \text{ ja } n \text{ ir divnieka pakāpe} \\ 2 & \text{ pretējā gadījumā.} \end{cases}$$

Mēs sadalām risinājumu trīs daļās.

1. daļa: Konstrukcija divnieka pakāpei

Šī daļa ir acīmredzama; no divām kaudzēm ar x un x oļiem var izveidot vienu kaudzi ar $2x$ oļiem. Tādējādi mēs varam sākt ar 2^k kaudzēm, katrā pa vienam oļim, un tās apvienot 2^{k-1} kaudzēs ar 2 oļiem. Atkārtotam šo darbību līdz iegūstam vienu kaudzi ar 2^k oļiem.

2. daļa: Pierādījums gadījumam, kad n nav divnieka pakāpe

Pierādīsim, ka, ja n nav divnieka pakāpe, tad nav iespējams izveidot vienu kaudzi. Pieņemsim, ka $t > 1$ ir nepāra dalītājs skaitlim n . Mēs apgalvojam, ka jebkurā brīdī vismaz vienā kaudzē ir skaits, kas nav dalāms ar t . Patiešām, ja tiek veikta darbība $(x, y) \mapsto (x - z, y - z, 2z)$ un gadās, ka t dala $x - z$, $y - z$ un $2z$, tad pēdējais nosacījums nozīmē, ka t dala arī z , tādējādi t dala arī x, y . Tādēļ sākotnējā konfigurācijā visiem skaitļiem būtu jābūt dalāmiem ar t , kas rada pretrunu. Tādējādi, ja gala rezultātā būtu viena kaudze, tai būtu jābūt dalāmai ar t , kas nav iespējams.

3. daļa: Konstrukcija gadījumam, kad n nav divnieka pakāpe

Vispirms atzīmējam, ka pietiek pierādīt gadījumu, kad n ir nepāra. Ja x darbojas un mēs sākam ar $2x$ kaudzēm, tad varam iegūt četras kaudzes a, a, b, b , kur $a + b = x$, atkārtotot konstrukciju pirmajām x un pēdējām x kaudzēm. Tad apvienojam a, a iegūstot $2a$ un b, b iegūstot $2b$.

Tagad pierādām, ka, ja n ir nepāra, tad ir iespējams sasniegt divas kaudzes ar 1 un $n - 1$ akmeņiem. Pierādījums ir indukcija pēc n , kur bāzes gadījums $n = 3, 5$ ir viegli pārbaudāms. Induktīvajā soli sākam ar

$$\begin{aligned} 1, 1, \dots, 1 &\rightarrow 1, 1, 1, n - 3 \\ &\rightarrow 1, 1, n - 4, 2 \\ &\rightarrow n - 4, 2, 2 \\ &\rightarrow n - 4, 4 \end{aligned}$$

Tagad, ja mums ir x, y , mēs to varam pārveidot par $y - x, 2x$. Ņemot vērā moduli n , katra kaudze pēc šīs darbības tiks reizināta ar 2. Tādējādi, ja šo darbību veicam $\varphi(n) - 2$ reizes, nonākam pie $n - 1, 1$, kas ir pierādāmais rezultāts.

11. uzdevums *Ejot mājās no pludmales, Maksims secināja, ka akmeņu kaudze izskatīsies labāk no augstāka punkta, tādēļ izlēma uzkāpt augstā kokā. Kāpjot augšā viņš iedomājās sekojošu uzdevumu: atrast visus iespējamās skaitļu pārus $x, y \in \mathbb{N}_0$, kuriem $2^x + 3^y$ ir naturāla skaitļa kvadrāts. Atrisināt Maksima uzdevumu.*

Atrisinājums. Vienīgie nenegatīvie veselo skaitļu risinājumi vienādojumam

$$2^x + 3^y = z^2 \tag{1}$$

ir $(x, y, z) = (0, 1, 2), (3, 0, 3), (4, 2, 5)$.

Pierādījums: No (1) mums ir $z^2 \geq 2$, t.i., $z \geq 2$.

Pieņemsim, ka $y = 0$. Tad pēc (1)

$$2^x = (z - 1)(z + 1), \tag{2}$$

kas nozīmē, ka $(z - 1, z + 1) = (2^a, 2^b)$, kur $0 < a < b$ un $a + b = x$. Tādējādi

$$2 = (z + 1) - (z - 1) = 2^b - 2^a, \tag{3}$$

no kā izriet $(a, b) = (1, 2)$, kas nozīmē $x = a + b = 1 + 2 = 3$ un $z = 2^a + 1 = 2^1 + 1 = 3$. Tādējādi ir viens risinājums $(x, z) = (3, 3)$.

Tālāk pieņemsim, ka $y \geq 1$.

Apskatīsim gadījumu, kad $x \leq 2$. Ja $x = 1$, tad pēc (1) $z^2 \equiv 2 \pmod{3}$, kas nav iespējams. Tātad $x \neq 1$. Ievietojot $x = 2k$, kur $k \in \{0, 1\}$, iegūstam

$$3^y = (z - 2^k)(z + 2^k), \tag{4}$$

no kā izriet $(z - 2^k, z + 2^k) = (3^c, 3^d)$, kur $0 \leq c < d$ un $c + d = y$. Tātad

$$2^2 \geq 2^{k+1} = (z + 2^k) - (z - 2^k) = 3^d - 3^c \geq 3^{c+1} - 3^c = 2 \cdot 3^c, \tag{5}$$

kas nozīmē, ka $3^c \leq 2$. Tādējādi $c = 0$, kas dod $3^d = 2^{k+1} + 1 \in \{3, 5\}$, no kā izriet $k = 0$ un $d = 1$. Citiem vārdiem, $y = c + d = 0 + 1 = 1$ un $z = 2^k + 3^c = 2^0 + 3^0 = 2$. Tādējādi vienīgais risinājums ir $(y, z) = (1, 2)$.

Visbeidzot, apskatīsim gadījumu, kad $x \geq 3$. Tā kā $y > 0$, pēc (1) z ir nepāra skaitlis. Tādējādi $3^y \equiv 1 \pmod{8}$, kas nozīmē, ka y ir pāra skaitlis. Tādējādi $y = 2w$, kas ievietots (1) dod

$$2^x = (z - 3^w)(z + 3^w), \quad (6)$$

no kā izriet $(z - 3^w, z + 3^w) = (2^u, 2^v)$, kur $0 \leq u < v$ un $u + v = x$. Tādējādi

$$2^v - 2^u = (z + 3^w) - (z - 3^w) = 2 \cdot 3^w, \quad (7)$$

t.i.

$$2^{v-1} - 2^{u-1} = 3^w. \quad (8)$$

Ja $u \geq 2$, tad $2|3^w$, kas nav iespējams. Tādējādi $u = 1$, kas ievietots (2) dod

$$2^{v-1} - 3^w = 1. \quad (9)$$

$v - 1$ nevar būt 1. Ja $v - 1 \geq 3$, tad 2^{v-1} dalās ar 8, bet $1 + 3^w$ nevar dalīties ar 8 (skaitļa trīs pakāpes dod tikai atlikumus 3 un 1, dalot ar 8). Ja $v - 1 = 2$, tad vienādojums kļūst $2^2 - 3^w = 1$, kas nozīmē, ka $w = 1$. Tādējādi $(v, w) = (3, 1)$, no kā izriet $x = u + v = 1 + 3 = 4$, $y = 2w = 2 \cdot 1 = 2$ un $z = 2^u + 3^w = 2^1 + 3^1 = 5$. Tādējādi vienīgais risinājums ir $(x, y, z) = (4, 2, 5)$.

Secinājums: Vienādojumam (1) ir tikai trīs nenegatīvi veselo skaitļu risinājumi, proti, $(x, y, z) = (0, 1, 2), (3, 0, 3), (4, 2, 5)$.