



Fināla uzdevumi 7-8 klasēm

1.uzdevums *Atrast visus veselu skaitļu pārus (x, y) , ka*

$$\begin{cases} y > x^2 + 3x + 5 \\ y < 1,5x + 6 \end{cases}$$

Atrisinājums. Vienīgais pāris ir $(-1, 4)$. Novērojam, ka mums ir

$$\begin{aligned} 1,5x + 6 &> y > x^2 + 3x + 5 \\ 0 &> x^2 + 1,5x - 1 \\ 0 &> (x + 2)(x - 0,5) \end{aligned}$$

Apskatām kvadrātvienādojumu $x^2 + 1,5x - 1$, tā kā $a = 1 > 0$, tad

$$0 > (x + 2)(x - 0,5) \implies x \in (-2; 0,5)$$

Tā kā x ir vesels, tad x ir -1 vai 0 .

Ja $x = 0$, tad $y_1 = 0^2 + 3 \cdot 0 + 5 = 5$ un $y_2 = 1,5 \cdot 0 + 6 = 6$. Taču neeksistē vesels y , ka $y > 5$ un $y < 6$. Līdz ar to pie $x = 0$ atrisinājuma nav.

Ja $x = -1$, tad $y_1 = 3$ un $y_2 = 4,5$, un eksistē atrisinājums $y = 4$, līdz ar to $(-1, 4)$ ir arī vienīgais atrisinājums.

2.uzdevums *Uz tāfeles ir uzrakstīti veseli skaitļi no 1 līdz 2024. Katru minūti Maksims izdzēš 2 skaitļus a un b , un to vietā uzraksta skaitli $a - 2b$ (ne obligāti pozitīvs). Vai var gadīties, ka pēc 2023 minūtēm uz tāfeles paliek skaitlis 1?*

Atrisinājums. Novērojam, ka pašā sākumā skaitļu summa dalās ar 3:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2024 = \frac{(1 + 2024) \cdot 2024}{2} = 2025 \cdot 1012$$

un pēc dalāmības pazīmes ar 3 skaitlis 2025 dalās ar 3, kas nozīmē, ka viss reizinājums dalās ar 3.

Tālāk apskatām uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summas izmaiņas. Ievērojam, ka $a + b - (a - 2b) = 3b$, kas dalās ar 3. Tas nozīmē, ka katru minūti uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa izmainās par skaitli, kas dalās ar 3. Tā kā pašā sākumā šī summa dalās ar 3, tad pēc veiktās darbības arī rezultāts dalīsies ar 3. Taču skaitlis 1 nedalās ar 3, līdz ar to prasītais nav iespējams.

3. uzdevums *Atrast visas reālas saknes vienādojumam*

$$x^3 + x^2 = 12$$

Atrisinājums. Redzam, ka

$$x^3 + x^2 = 12$$

$$x^3 - 8 + x^2 - 4 = 0$$

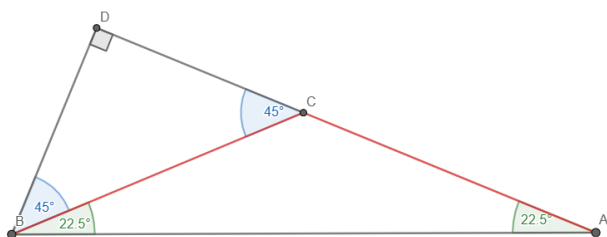
$$x^3 - 2^3 + x^2 - 2^2 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) + (x - 2)(x + 2) = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 3x + 6) = 0$$

Līdz ar to $x - 2 = 0 \implies x = 2$ vai $x^2 + 3x + 6 = 0$. Tomēr $D = b^2 - 4ac = -15 < 0$, līdz ar ko reālas saknes pie $x^2 + 3x + 6 = 0$ nav, un vienīgais atrisinājums ir $x = 2$.

4. uzdevums *Dots vienādsānu trijstūris, kura sānu malas garums ir 8 un leņķi pie pamata ir $22,5^\circ$. Kāds ir trijstūra laukums?*



Atrisinājums. Papildināsim zīmējumu ar augstumu BD pret taisni AC . Novērojam, ka $\angle BCA = 180^\circ - \angle CBA - \angle CAB = 180^\circ - 22,5^\circ - 22,5^\circ = 135^\circ$. Taču kā blakusleņķis leņķim BCA mums ir $\angle DCB = 180^\circ - \angle BCA = 45^\circ$. Apskatot trijstūri BDC , mums ir $\angle DBC = 180^\circ - \angle BDC - \angle DCB = 45^\circ$. Tā kā $\angle DCB = \angle DBC = 45^\circ$, tad trijstūris BDC ir vienādsānu, un mums ir $BD = CD$. Pēc Pitagora teorēmas $BC^2 = BD^2 + CD^2 \implies 8^2 = 2 \cdot BD^2 \implies BD = CD = 4\sqrt{2}$

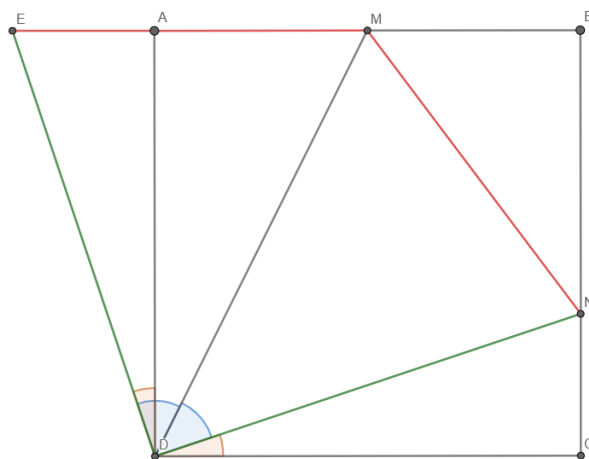
Novērojam, ka $S_{ABC} = BD \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16\sqrt{2}$

5. uzdevums Cik liels ir atzīmētais leņķis dotajā kvadrātā?

Atrisinājums. Pagarinām taisni AB līdz E , ka $AE = NC = 2$. Ievērojam, ka $MB = AB - AM = 6 - 3 = 3$ un $BN = BC - CN = 6 - 2 = 4$, tad pēc Pitagora teorēmas mums ir $MN = 5$.

Pierādīsim, ka trijstūri DEM un DNM ir vienādi. Ievērojam, ka $EM = AE + AM = 5 = MN$, DM ir kopīga mala, un $DE^2 = AE^2 + AD^2 = NC^2 + CD^2 = DN^2 \implies DE = DN$, līdz ar ko trijstūri DEM un DNM ir vienādi. Tādā gadījumā $\angle NDM = \angle EDM = \angle EDA + \angle ADM$. Tomēr redzam, ka $\angle EDA = \angle NDC$, jo trijstūri EDA un NDC ir vienādi pēc pazīmes mmm. Līdz ar to $\angle NDM = \angle EDM = \angle EDA + \angle ADM = \angle NDC + \angle ADM$.

Apskatām leņķi $\angle ADC = 90^\circ$. Ievērojam, ka $\angle ADC = \angle NDM + \angle NDC + \angle ADM = 2\angle NDM \implies \angle NDM = \frac{1}{2}\angle ADC = 45^\circ$.

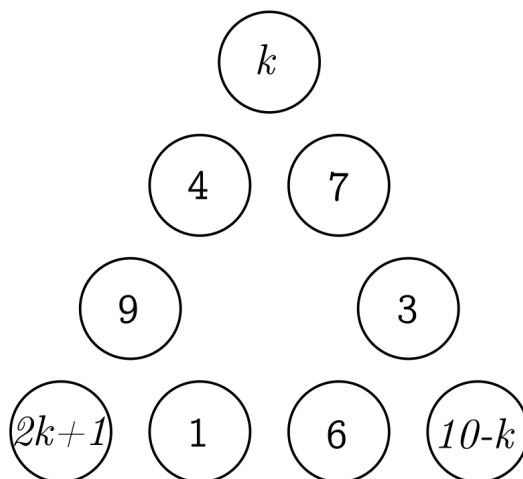


6.uzdevums Dots izliekts daudzstūris ar $n \geq 5$ virsotnēm, un tā laukums ir sadalīts vairākos trijstūros, kuru virsotnes sakrīt ar daudzstūra virsotnēm, turklāt nevienam divu trijstūru laukumam nepārklājas. Katrs trijstūris ir iekrāsots vai nu sarkanā vai zilā krāsā. Virsotni saucim par atvērtu, ja tā nepieder diviem dažādiem tās pašas krāsas trijstūriem. Atrast lielāko iespējamo skaitu atvērtu virsotņu un pierādīt, ka vairāk nevar būt.

Atrisinājums.

7. uzdevums 9 dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 9 ir sakārtoti trijstūrī. Ir zināms, ka, saskaitot visus skaitļus, kas atrodas uz vienas trijstūra malas, tiek iegūta viena un tā pati summa neatkarīgi no izvēlētas malas. Tāpat arī vienas malas visu skaitļu kvadrātu summa ir vienāda pie visām malām. Atrast k un aizpildīt trijstūri ar trūkstošajiem skaitļiem (ir iespējami vairāki varianti).

Atrisinājums. $k = 2$. Viens variants, kā aizpildīt trijstūri:



8.uzdevums Dots trijstūris ar laukumu 1, kurā ir atzīmēti 9 punkti, un nav tādu 3 punktu, kas atrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka eksistē tādi 3 atzīmēti punkti, kuri veido trijstūri, kura laukums nav lielāks par $\frac{1}{4}$.

Atrisinājums. Apskatām trijstūri ABC un tajā atzīmēsim punktus F, D, E , kur ir malas AB, BC, AC viduspunkti. Ievērojam, ka $\triangle AFE, \triangle BDF, \triangle CED$ laukumi ir tieši $\frac{1}{4}$. Pēc Dirihlē principa mēs zinām, ka vismaz vienā trijstūrī būs 3 punkti. Līdz ar to šie trīs punkti veidos trijstūri, kura laukums nepārsniedz $\frac{1}{4}$.

9.uzdevums Doti trīs dažādi punkti A, B, C , kuri atrodas uz vienas riņķa līnijas. Katrā brīdī Maksims izvēlas vienu punktu, un kustina to virzienā, kas paralēls taisnei, kas savieno pārējos divus punktus. Vai Maksims var panākt, ka šie trīs punkti atrodas uz vienas taisnes?

Atrisinājums. Ievērosim, ka katra darbība, ko Maksims veic, ir atgriezeniska. Tas nozīmē, ka, ja kāds punkts tiek pārvietots no punkta M uz punktu N , tad to var uzreiz pārvietot atpakaļ uz punktu M , jo pārējie divi punkti nav izkustējušies, tātad arī aplūkotā punkta atļautais kustības virziens nav mainījies. No tā varam secināt, ka, ja Maksims var panākt, ka A, B, C atrodas uz vienas taisnes, tad Maksims var arī atgriezt savu pēdējo darbību un panākt, ka A, B, C nav uz vienas taisnes. Taču ja visi trīs punkti atrodas uz vienas taisnes, visu punktu atļautie kustības virzieni sakrītīs ar taisni, tādēļ Maksims nevarēs panākt, ka A, B, C nav uz vienas taisnes. Varam secināt, ka Maksims nevar panākt, ka šie trīs punkti atrodas uz vienas taisnes.

10. uzdevums Kurš no skaitļiem ir lielāks: 24^{20} vai 20^{24} ?

Atrisinājums. Pierādīsim, ka $24^{20} < 20^{24}$:

$$\begin{aligned} 24^{20} &< 20^{24} \\ 24^{20} &< 20^{20} \cdot 20^4 \\ 1, 2^{20} &< 20^4 \\ (1, 2^5)^4 &< 20^4 \\ 1, 2^5 &< 20 \end{aligned}$$

Redzam, ka pēdējā nevienādība ir patiesa, jo $1, 2^5 = 2, 44 \cdot 2, 44 \cdot 1, 2 < 7, 15 < 20$.

11. uzdevums *Edgars un Maksims ir nopirkuši lidmašīnas biļetes. Lidmašīna lido uz Ķīnu un tajā ir tieši 2024 sēdvietas. Zināms, ka kopā ir 2024 pasažieri, un katram no viņiem ir atbilstoša sēdvietā. Pasažieri iekāpj lidmašīnā viens pēc otra, turklāt Maksims ir pirmais pasažieris, un Edgars ir pats pēdējais pasažieris. Iekāpjot lidmašīnā, Maksims aizmirsas savas sēdvietas numuru un izvēlējās apsēsties patvaļīgā sēdvietā. Katrs nākamais pasažieris apsēžas savā vietā, ja tā ir neaizņemta, vai apsēžas patvaļīgā neaizņemtā sēdvietā. Cik liela ir iespēja, ka Edgars apsēdīsies sev atbilstošajā vietā?*

Atrisinājums. Novērojam, ka uzdevuma nosacījums ir ekvivalents tam, ka katrs nākamais pasažieris (pēc Maksima) apsēžas savā vietā, un Maksims apsēžas patvaļīgā brīvā vietā. Tas nozīmē, ka pēc tam, kad apsēžas 2023. pasažieris, būs palikuši tieši 2 vietas. Skaidrs, ka viena no šīm vietām pieder Edgaram, taču vienā tām apsēdīsies Maksims. Tā kā Maksims patvaļīgi izvēlas vietu, kur apsēsties, tad ir 50% iespēja, ka viņš apsēdīsies Edgara vietā un 50% iespēja, ka apsēdīsies ne Edgara vietā. Līdz ar to ir 50% iespēja, ka Edgars apsēdīsies sev atbilstošajā vietā.