



Atvērtā kopa 2024

Piezīmes: Uzdevumi nav sakārtoti pēc grūtības.

Katrs uzdevums ir vērts 5 punktu.

Atbildes ir jāpamato.

Komandas drīkst uzdot jautājumus par jēdzienu definīcijām.

Pierādījumos nedrīkst lietot mērījumus no dotajiem zīmējumiem.

Uz katras risinājuma lapas ir jāuzraksta komandas nosaukums.

Fināla uzdevumi 9. un 10. klasei

1. uzdevums Dota parabola $y = x^2 - 3x - 4$, kas krusto x asi punktos A un B (punkts A atrodas pa kreisi punktam B) un y asi punktā C . Punkts P ir punkts zem taisnes BC un atrodas uz parabolas. Atrast lielāko laukumu trijstūrim PBC un punkta P koordinātas pie tā.

2. uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi x, y, z , kas apmierina sakarību $xyz = 1$. Pierādīt, ka

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \geq 2$$

3. uzdevums Atrast, cik daudz dažādu skaitļu var izteikt formā $\frac{m^2-2}{m^2-m+2}$, kur $m \in \mathbb{N}$, $m \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$.

4. uzdevums Kvadrātā ar malas garumu 5 atrodas vairākas riņķa līnijas. Zināms, ka šo riņķa līniju rādiusu summa ir 8. Pierādīt, ka eksistē taisne, kas iet caur vismaz 4 riņķa līnijām.

5. uzdevums Dota sekojoša virkne: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_{n-1}}$, kur $n \in \mathbb{N}$, un $n > 1$. Pierādīt, ka

$$a_{2024} > 4\sqrt{253}$$

6. uzdevums Atrast visus naturālu skaitļu trijniekus (x, y, z) , kas apmierina vienādojumu $3^x + 8^y = 9z + 2$.

7. uzdevums Dots trijstūris ABC , kur $AC = 4$, $BC = 5$, un $\angle BCA = 30^\circ$. Punkts P atrodas trijstūra iekšpusē. Kāda ir izteiksmes $AP + BP + CP$ mazākā iespējamā vērtība?

8. uzdevums Maksimlandē ir n pilsētas, un pilsētas ir savienotas ar ceļiem. Zināms, ka neviena pilsēta nav savienota ar vairāk kā d citām pilsētām. Pierādīt, ka ir iespējams pilsētas sadalīt $d + 1$ novados tā, ka jebkuras divas pilsētas, starp kurām ir ceļš, nepieder tam pašam novadam.

9. uzdevums Uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2024. Kāds ir maksimālais skaitļu skaits, ko var izvēlēties, lai jebkuru divu izvēlēto skaitļu summa nedalītos ar šo pašu divu skaitļu starpību?

10. uzdevums Maksims ir ieslodzīts viduslaiku pilī, un, lai izklūtu ārā no tās, jāatrisina cietuma sarga uzdots uzdevums: Edgaram ir skaitlis n , bet Džeisonam m , $n, m \in \mathbb{N}$. Edgars katru dienu sareizina savu skaitli ar 2 un atņem no tā 2, bet Džeisons sareizina savu skaitli ar 2 un pieskaita tam 2. Citiem vārdiem sakot, pēc 1. dienas Edgara skaitlis būs $2n - 2$, bet Džeisona - $2m + 2$. Atrast mazāko naturālo skaitli x , kur $n - m \geq x$, kas nodrošina, ka Edgara skaitlis vienmēr būs lielāks nekā Džeisona un pierādīt, ka mazāka nav.

11. uzdevums Dots $m \times n$ rūtiņu taisnstūris, kura kreisajā apakšējā rūtiņā ir šaha bandinieks. Maksims un Edgars spēlē sekojošu spēli, veicot gājienus viens pēc otra: katrā gājienā spēlētājs bandinieku pārvieto jebkurā kaimiņu rūtiņā, kurai ir kopīga mala ar iepriekšējo rūtiņu. Taču bandinieks nedrīkst ieiet rūtiņā, kurā tas jau ir bijis. Edgars pirmais veic gājienu, un spēli zaudē tas spēlētājs, kuram nepaliek neviens atļauts gājiens. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?