

Atvērtā kopa 2024

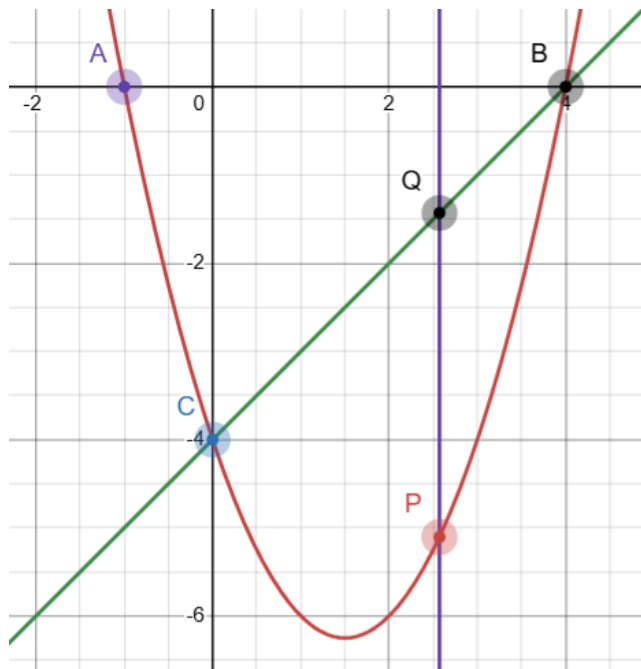
Fināla uzdevumi 9-10 klasēm

1.uzdevums Dota parabola $y = x^2 - 3x - 4$, kas krusto x asi punktā A un B (punkts A atrodas pa kreisi punktam B) un y asi punktā C . Punkts P ir punkts zem taisnes BC un atrodas uz parabolas. Atrast lielāko laukumu trijstūrim PBC un tā brīža punkta P koordinātas.

Atrisinājums. No sākuma aprēķināsim punktu A un B koordinātas:

$$\begin{aligned}x^2 - 3x - 4 &= 0 \\(x - 4)(x + 1) &= 0\end{aligned}$$

Tā kā punkts A atrodas pa labi punktam B , tad mums ir $A = (-1, 0)$ un $B = (4, 0)$. Tā kā punkts C atrodas uz y ass, tad $C = (0, 0^2 - 3 \cdot 0 - 4) = (0, -4)$. Definējam punktu Q , kas atrodas uz taisnes BC un PQ ir paralēla y asij.



Novērojam, ka $S_{PBC} = S_{CPQ} + S_{BPQ} = \frac{1}{2}(PQ \cdot h_c + PQ \cdot h_b) = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot (h_c + h_b) = 2PQ$, kur h_c un h_b ir attiecīgi distance no C un B līdz taisnei PQ . Līdz ar to S_{PBC} sasniedz maksimumu tad, kad nogriežņa PQ garums ir maksimāls. Tā kā $BC = x - 4$, tad $PQ = x - 4 - (x^2 - 3x - 4) = -x^2 + 4x = -(x - 2)^2 + 4$, kas nozīmē, ka $PQ \leq 4$, jeb S_{PBC} maksimums ir $2PQ = 8$. Tajā brīdī punkta P koordinātas ir $(2, 2^2 - 3 \cdot 2 - 4) = (2, -6)$

2.uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi x, y, z , kas apmierina sakarību $xyz = 1$. Pierādīt, ka

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \geq 2$$

Atrisinājums. Novērojam, ka

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{1}{3}$$

jo

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} &\geq \frac{1}{3} \\ 3(x^2 - xy + y^2) &\geq x^2 + xy + y^2 \\ 2(x - y)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Līdz ar to

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \cdot (x + y) \geq \frac{x + y}{3}$$

un mums ir

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{x + y}{3} + \frac{y + z}{3} + \frac{z + x}{3} = \frac{2}{3}(x + y + z)$$

Tācu $\frac{2}{3}(x + y + z) \geq \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = 2$, un uzdevums ir pierādīts.

3.uzdevums Atrast, cik daudz dažādus skaitļus iespējams izteikt formā $\frac{m^2-2}{m^2-m+2}$, kur $m \in \mathbb{N}$, $m \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$.

Atrisinājums. Apzīmēsim šos skaitļus ar a_n . Ievērosim, ka varam izteikt $a_n = \frac{m^2-2}{m^2-m+2} = 1 + \frac{m-4}{m^2-m+2}$. Ja pastāv tādi dažādi p, q , kuriem $a_p = a_q$, $p, q \in \{1, 2, \dots, 100\}$, varam teikt, ka $\frac{p-4}{p^2-p+2} = \frac{q-4}{q^2-q+2}$

$$\begin{aligned} (p-4)(q^2-q+2) &= (q-4)(p^2-p+2) \\ pq^2 - pq + 2p - 4q^2 + 4q - 8 &= qp^2 - qp + 2q - 4p^2 + 4p - 8 \\ pq^2 - pq + 2p - 4q^2 + 4q - 8 - qp^2 + qp - 2q + 4p^2 - 4p + 8 &= 0 \\ pq^2 - qp^2 - pq + qp + 2p - 4p + 4q - 2q - 4q^2 + 4p^2 - 8 + 8 &= 0 \\ (p-q)(pq - 4p - 4q + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Tā kā $p \neq q$, $p - q \neq 0$, tādēļ jāizpildās $pq - 4p - 4q + 2 = 0$. Veicot pārveidojumus, varam iegūt $pq - 4p - 4q + 16 = 14$ jeb $(p-4)(q-4) = 14$. Vienīgie naturālo skaitļu pāri, kuru reizinājums ir 14, ir $(7, 2)$ un $(1, 14)$. Tātad der vienīgi skaitļu pāri $(p, q) = (5, 18), (18, 5), (11, 6), (6, 11)$. Tātad $a_5 = a_{18}$, $a_6 = a_{11}$, tātad no 100 iespējamajiem ir 98 dažādi skaitļi.

4.uzdevums Kvadrātā ar malas garumu 5 atrodas vairākas riņķa līnijas. Zināms, ka šo riņķa līniju rādiusu summa ir 8. Pierādīt, ka eksistē taisne, kas iet caur vismaz 4 riņķa līnijām.

Atrisinājums. Projicēsim šīs riņķa līnijas uz kādu no kvadrāta malām. Redzam, ka riņķa līniju diametru summa ir 16, taču kvadrāta malas garums ir tikai 5. Tas nozīmē, ka eksistē posms uz kvadrāta malas, uz kura tika projicētas vismaz 4 riņķa līnijas. Izvēloties kādu patvaļīgu punktu uz šī posma un no tā novelkot taisni perpendikulāri kvadrāta malai, iegūsim taisni, kas iet caur vismaz 4 riņķa līnijām.

5.uzdevums Dota sekojoša virkne: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_{n-1}}$, kur $n = 2, 3, \dots$. Pierādīt, ka

$$a_{2024} > 4\sqrt{253}$$

Atrisinājums. Pierādīsim, ka $a_n > \sqrt{2n}$ katram n . Novērojam, ka visi virknes locekļi ir pozitīvi. Līdz ar to no dotā

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_{n-1}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}} > a_n$$

tā kā $a_2 > a_1$, tad secinām, ka $a_{n+1} > a_n$ katram $n = 1, 2, \dots$. Līdz ar to

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}} > a_n + \frac{1}{a_n}$$

Tālāk izmantosim matemātisko indukciju. Redzam, ka $a_3 = 3 > \sqrt{2 \cdot 3}$. Pieņemsim, ka $a_m > \sqrt{2m}$ un pierādīsim, ka $a_{m+1} > \sqrt{2(m+1)}$. Ievērojam, ka

$$a_{m+1}^2 > \left(a_m + \frac{1}{a_m}\right)^2 = a_m^2 + 2 + \frac{1}{a_m^2} > a_m^2 + 2 > 2m + 2 = 2(m+1)$$

Līdz ar to secinām, ka $a_{m+1} > \sqrt{2(m+1)}$, kas pierāda induktīvo pāreju. Ievietojot $n = 2024$, iegūsim, ka

$$a_{2024} > \sqrt{2 \cdot 2024} = \sqrt{16 \cdot 11 \cdot 23} = 4\sqrt{253}$$

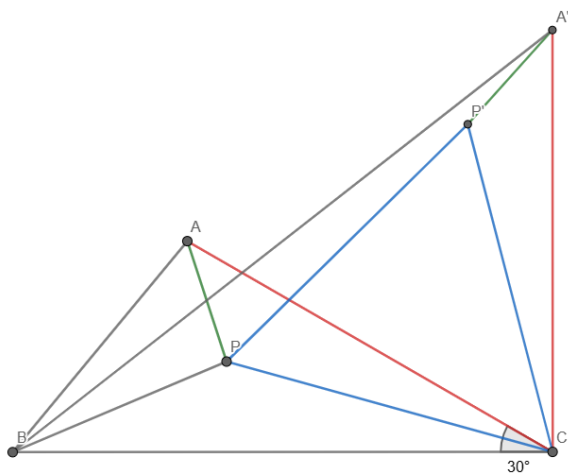
6.uzdevums Atrast visus naturālus skaitļu trijniekus (x, y, z) , kas apmierina vienādojumu $3^x + 8^y = 9z + 2$.

Atrisinājums. Aplūkosim gadījumu, kad $x \geq 2$. Tādā gadījumā gan 3^x , gan $9z$ dalās ar 9, tātad 8^y jābūt atlikumam 2, dalot ar 9, taču $8^y \equiv (-1)^y$, taču -1 neviena naturāla skaitļa pakāpē nevar būt 2, tātad šādu skaitļu trijnieku nav. Ja $x = 1$, tad $8^y = 9z - 1$.

7. uzdevums Dots trijstūris ABC , kur $AC = 4$, $BC = 5$ un $\angle BCA = 30^\circ$. Punkts P atrodas iekšā trijstūrī. Kāda ir izteiksmes $AP + BP + CP$ mazākā iespējamā vērtība?

Atrisinājums. Pagriezīsim trijstūri APC pa 60° pretpulksteņrādītājvirzienā un iegūsim trijstūri $A'P'C$. Skaidrs, ka šie divi trijstūri ir vienādi. Ievērojam, ka $PC = P'C$ un $\angle PCP' = 60^\circ$, līdz ar to trijstūris PCP' ir vienādmalu, un $PP' = PC$. Savienojam $A'B$, ievērojam, ka $AP + BP + CP \geq A'B$, un vienādība ir tad, kas punkts P atrodas uz $A'B$. Līdz ar to mums paliek vien aprēķināt nogriežņa $A'B$ garumu, kas ir arī $AP + BP + CP$ mazākā iespējamā vērtība.

Ievērojam, ka $\angle BCA' = \angle BCA + \angle ACA' = 90^\circ$ un $A'C = AC = 4$, tad pēc Pitagora teorēmas $A'B = \sqrt{BC^2 + A'C^2} = \sqrt{41}$



8.uzdevums Maksimlandē ir n pilsētas, un pilsētas savieno ceļi. Zināms, ka neviena pilsēta nav savienota ar vairāk kā d pilsētām. Pierādīt, ka ir iespējams pilsētas sadalīt $d + 1$ novados tā, ka jebkuras divas pilsētas, starp kurām ir ceļš, nepieder tam pašam novadam.

Atrisinājums. Definēsim "kaimiņu" pilsētu kā pilsētu, kas ir savienota ar kādu pilsētu ar ceļu. Rīkosim sekojoši: numurēsim pilsētas patvaļīgā secībā un novadus kā 1., 2., 3., un tā tālāk. Pievienosim 1. pilsētu 1. novadam. Tālāk ņemsim pilsētas pēc secības, un katru nākamo pilsētu pievienosim novadam, kura numurs ir mazākais iespējamais, kas vēl netika izmantots šīs pilsētas kaimiņu pilsētām. Piemēram, ja 5. pilsētas kaimiņi jau tika pievienoti 1., 2., un 4. novadam, tad 5. pilsētu pievienosim 3. novadam. Skaidrs, ka šis algoritms garantē, ka kaimiņu pilsētas nepieder tam pašam novadam. Tā kā neviena pilsēta nav vairāk kā d kaimiņu, tad šis algoritms arī garantē, ka ir iespējams sagrupēt šīs pilsētas $d + 1$ novadiem: kad apskatām pilsētu P , tad tās kaimiņi pieder visvairāk d novadiem. Līdz ar to ir iespējams pievienot P kādam novadam, kas nav kaimiņu pilsētas novads. Tātad šis algoritms izies caur visām pilsētām, un prasītais izpildās.

9. uzdevums Uz tāfeles ir uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2024. Kāds ir maksimālais skaitļu skaits, ko var izvēlēties, lai jebkuru divu izvēlēto skaitļu summa nedalītos ar šo pašu divu skaitļu starpību?

Atrisinājums. Izvēlēsimies 675 skaitļus $1, 4, 7, \dots, 2023$. Redzam, ka visi skaitļi dod atlikumu 1, dalot ar 3. Līdz ar to jebkuru divu skaitļu starpība dalīsies ar 3, taču to summa nedalīsies ar 3. Līdz ar to jebkuru divu izvēlēto skaitļu summa nedalās ar šo pašu divu skaitļu starpību.

Tālāk pierādīsim, ka vairāk par 675 skaitļus nevaram izvēlēties. Apskatām gadījumu, kad ir izvēlēti vairāk nekā 675 skaitļi. Sagrupēsim skaitļus sekojoši: $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \dots, \{2020, 2021, 2022\}, \{2023, 2024\}$. Ievērojam, ka ir kopā 675 grupas. Pēc Dirihlē principa mēs zinām, ka noteikti 2 no izvēlētajiem skaitļiem būs no vienas grupas.

Apzīmēsim šos 2 skaitļus ar a un b . Ja $a - b = 1$, tad skaidrs, ka to summa dalīsies ar to starpību. Ja $a - b = 2$, tad abi skaitļi ir nepāra, un to summa būs pāra, kas dalīsies ar to starpību 2. Līdz ar to, izvēloties vairāk nekā 675 skaitļus, iegūsim pretrunu.

10. uzdevums Maksims ir ieslodzīts viduslaiku pilī, un, lai izkļūtu ārā no tās, jāatrisina cietuma sarga uzdots uzdevums: Edgaram ir skaitlis n , bet Džeisonam m , $n, m \in \mathbb{N}$. Edgars katru dienu sareizina savu skaitli ar 2 un atņem no tā 2, bet Džeisons sareizina savu skaitli ar 2 un pieskaita tam 2. Citiem vārdiem sakot, pēc 1. dienas Edgara skaitlis būs $2n - 2$, bet Džeisona - $2m + 2$. Atrast mazāko naturālo skaitli x , kur $n - m \geq x$, kas nodrošina, ka Edgara skaitlis vienmēr būs lielāks nekā Džeisona un pierādīt, ka mazāka nav.

Atrisinājums. Aplūkosim Edgara skaitli. Apzīmēsim Edgara skaitli pēc t dienām ar n_t , sākotnējo skaitli ar n_0 . Pēc uzdevuma nosacījumiem, varam iegūt sakarību $n_t = 2n_{t-1} - 2$. Varam veikt sekojošus pārveidojumus:

$$n_t - 2 = 2n_{t-1} - 4$$

$$n_t - 2 = 2(n_{t-1} - 2), \text{ ieviesīsim jaunu virkni } b_t = n_t - 2. \text{ Ievietojot izteiksmē, iegūst}$$

$b_t = 2b_{t-1}$. Acīmredzams, ka šīs virknes vispārīgo locekli var izteikt kā $b_t = 2^t b_0$. Ievietojot atpakaļ n_t , iegūst $n_t - 2 = 2^t(n_0 - 2) = 2^t(n - 2)$ jeb $n_t = 2^t(n - 2) + 2$. Analogiski apzīmējam Džeisona skaitli pēc t dienām ar m_t .

$$m_t = 2m_{t-1} + 2$$

$$m_t + 2 = 2(m_{t-1} + 2), a_t = m_t + 2$$

$$a_t = 2a_{t-1}, a_t = 2^t a_0$$

$$m_t + 2 = 2^t(m_0 + 2) = 2^t(m + 2)$$

$$m_t = 2^t(m + 2) - 2 \text{ Attiecīgi iegūstam nevienādību } n_t - m_t \geq 0$$

$$2^t(n - 2) + 2 - 2^t(m + 2) + 2 \geq 0 \quad n - 2 - m - 2 \geq -\frac{4}{2^t}$$

$$n - m \geq 4 - \frac{4}{2^t}$$

Ievērosim, ka $4 - \frac{4}{2^t}$ Nekad nepārsniegs 4, turklāt, tā kā $t \geq 1$, $4 - \frac{4}{2^t} \geq 2$. Kad dienu skaits tuvosies bezgalībai, 2^t tuvosies bezgalībai, tādēļ $4 - \frac{4}{2^t}$ tuvosies 4. Līdz ar to, mazākā x vērtība, ar kuru Edgara skaitlis vienmēr būs lielāks nekā Džeisona skaitlis, ir 4.

11. uzdevums Dots $m \times n$ rūtiņu taisnstūris, kura kreisajā apakšējā rūtiņā ir šaha bandinieks. Maksims un Edgars spēlē sekojošu spēli, veicot gājienus viens pēc otra: katrā gājienā spēlētājs bandinieku pārvieto jebkurā kaimiņu rūtiņā, kurai ir kopīga mala ar iepriekšējo rūtiņu. Taču bandinieks nedrīkst ieiet rūtiņā, kurā tas jau ir bijis. Edgars pirmais veic gājienu, un

spēli zaudē tas spēlētājs, kuram nepaliek neviens atļauts gājiens. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?

Atrisinājums. Apskatām 2 gadījumus.

- Ja mn dalās ar 2, tad Edgaram vienmēr ir uzvaroša stratēģija. Varam taisnstūri sadalīt ar domino kauliņiem. Ievērojam, ka Edgars vienmēr var garantēt, ka katrā savā gājienā bandinieks pārvietojas iekšpus domino kauliņam, līdz ar to pēc Edgara gājiena Maksimam vienmēr vajag pārvietot bandinieku ārpus vienam domino kauliņam. Tā kā kopējais domino kauliņu skaits ir ierobežots, tad secinām, ka vienā brīdī Maksimam nebūs domino kauliņu, kurā varēs pārvietot bandinieku, un viņš zaudēs.
- Ja mn nedalās ar 2, tad Maksimam vienmēr ir uzvaroša stratēģija. Šoreiz taisnstūri noklāsim ar domino kauliņiem, izņemot kreiso apakšējo rūtiņu. Šajā gadījumā Maksims var garantēt, ka katrā savā gājienā bandinieks pārvietojas iekšpus domino kauliņam, un Edgara gājienā bandinieks vienmēr ieies jaunā domino kauliņā. Tā kā kopējais domino kauliņu skaits ir ierobežots, tad secinām, ka vienā brīdī Edgaram nebūs domino kauliņu, kurā varēs pārvietot bandinieku, un viņš zaudēs.